CONCOURS

CPGE

EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 12 avril 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PT - TSI

DURÉE : 3 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

■ Exercice : Racine carrée d'une matrice

Notons $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels. Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Justifier que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les valeurs propres de A. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?

3) La matrice A est-elle inversible ?

4) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

5) Déterminer une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\Delta^2 = D$.

6) En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$.

■ Problème : La formule des compléments d'Euler

Dans ce problème, on démontre une relation entre la fonction Gamma d'Euler et la fonction sinus. Nous l'appliquons ensuite au calcul de l'intégrale de Gauss.

Dans tout le problème, la lettre a désignera un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Partie 1 : Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Considérons les intégrales suivantes :

$$I(a) = \int_0^1 \frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J(a) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t.$$

1) Démontrer que l'intégrale $I(a)$ est convergente.

2) Démontrer que l'intégrale $J(a)$ est convergente.

3) À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, démontrer que $J(a) = I(1-a)$.

4) Soit N un entier naturel.

(a) Démontrer que, pour tout réel t appartenant à $[0, 1]$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} - (-1)^{N+1} \frac{t^{N+1}}{1+t}.$$

(b) En déduire que :

$$I(a) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{n-a}\mathrm{d}t + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

5) Démontrer que pour tout entier naturel N :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{N+2-a},$$

puis déterminer la valeur de $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t$.

6) Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n-a+1}$ est convergente et démontrer que sa somme vaut $I(a)$.

7) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a}$ est convergente et démontrer que sa somme vaut $J(a)$.

8) En déduire que :

$$I(a)+J(a) = \frac{1}{1-a} + 2(a-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-(1-a)^2}.$$

On admet que l'on a la formule suivante, valable pour tout réel λ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\lambda}{n^2-\lambda^2} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}.$$

9) Conclure que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

Partie 2 : La fonction Gamma d'Euler

Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} \forall x > 0, & \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ \forall x \geqslant 0, & f_a(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t \end{cases}.$$

10) Démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

11) (a) Démontrer que la fonction f_a est continue sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f_a(0)$.

(b) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<\alpha<\beta$. Démontrer que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$. En déduire que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On précisera l'expression de sa dérivée avec le symbole intégrale.

12) (a) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a :

$$f_a(x) - f_a'(x) = \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

On pourra effectuer le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale $f_a(x) - f_a'(x)$.

(b) En déduire que pour tout réel $x>0$, on a :

$$0 \leqslant f_a(x) \leqslant \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$.

13) Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Dans la suite du problème, on pose pour tout réel $x \geqslant 0$, $g_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t$.

14) (a) Démontrer que la fonction g_a est continue sur $[0, +\infty[$.
(b) Démontrer que la fonction g_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. On précisera l'expression de sa dérivée.

15) (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant g_a(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1-a}}.$$

(b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_a(x)$.

Partie 3 : La formule des compléments

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \qquad \forall x > 0, \quad y(x) - y'(x) = \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

16) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).

17) Démontrer que la fonction $h_a : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Gamma(1-a)\mathrm{e}^x g_a(x) \end{cases}$ est une solution particulière de (E).

18) Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que :

$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = \lambda \mathrm{e}^x + h_a(x).$$

19) Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = h_a(x).$$

On pourra isoler λ et considérer la limite en $+\infty$ dans l'égalité précédente.

20) Déduire de la question précédente que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(t+1)} \mathrm{d}t = \Gamma(1-a) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t.$$

21) Démontrer alors *la formule des compléments* :

$$\forall a \in]0, 1[, \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Partie 4 : Application au calcul de l'intégrale de Gauss

22) Déterminer la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

23) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u$ est convergente déterminer sa valeur.