



Samedi 12 avril 2025

OPTION MATHÉMATIQUES

MP - MPI - PC - PSI - PT - TSI

DURÉE : 2 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

Dans ce problème, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} , n est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} . La matrice identité d'ordre n est notée I_n , et $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

La topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.

Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble $\mathcal{S}(M)$ constitué de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à M :

$$\mathcal{S}(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\}.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I : le cas des matrices d'ordre 2

1. Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose $E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices E_k et F_k sont inversibles et déterminer leurs inverses.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $E_k A E_k^{-1}$ et $F_k A F_k^{-1}$.

(c) Montrer que la classe de similitude de A est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

3. On suppose dans cette question que A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 dans \mathbb{K} .

Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(a) Soit $i \in \{1, 2\}$. En considérant la suite $(\det(M_k - \lambda_i I_2))_{k \geq 0}$, montrer que $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.

(b) En déduire que $B \in \mathcal{S}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

4. On suppose dans cette question que A a une seule valeur propre λ dans \mathbb{K} et que A n'est pas une matrice scalaire.

(a) Montrer que A est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

(b) En déduire que la classe de similitude de A n'est pas fermée.

5. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur A pour que $\mathcal{S}(A)$ soit fermée.

6. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le spectre réel de A est vide si, et seulement si, $4\det(A) - (\text{tr}(A))^2 > 0$.

Dans la suite de la question 6., on suppose cette condition réalisée.

(b) On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A . Montrer que $(e_1, u(e_1))$ est une base de \mathbb{R}^2 et que la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que B a à la fois la même trace et le même déterminant que A . En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

7. Conclure sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée.

Partie II : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

1. Soit u un endomorphisme de \mathbb{K}^n . Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie. On pourra raisonner avec la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n et considérer $u(e_1 + e_i)$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et u l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur x de \mathbb{K}^n tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de \mathbb{K}^n dans laquelle la matrice de u a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0, \alpha, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.

4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \|PMP^{-1}\| = \|M\| ?$$

Partie III : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - (a) Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ M & \mapsto & \chi_M(X) \end{array}$$
, qui à tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynôme caractéristique, est continue.
 - (b) Montrer que tout polynôme annulateur de A annule aussi B . En déduire que B est diagonalisable.
 - (c) Conclure que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(A)$ est fermée. On note u l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A , et on considère une base (b_1, b_2, \dots, b_n) de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ cette matrice.
 - (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{B}_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k}, \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}} \right)$ est une base de \mathbb{C}^n et écrire la matrice de u dans cette base en fonction des coefficients de T .
 - (b) En déduire que A est diagonalisable.

Partie IV : une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On pose $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(M) = \text{tr}(A)\}$.

Quelle est la structure de \mathcal{T} ? Montrer que \mathcal{T} est d'intérieur vide.

2. En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est d'intérieur vide.