EPITA IPSA ESME

CONCOURS

CPGE

EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 12 avril 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

MP - MPI - PC - PSI

DURÉE : 3 HEURES

Conditions particulières :

Calculatrice et documents interdits

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1. Étude d'une équation fonctionnelle

Dans tout l'exercice $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, λ est un réel tel que $|\lambda| < 1$ et a est un réel quelconque.

On pose lorsque cela a un sens : $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$.

Q1. On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. On suppose dans cette question que f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ notée ℓ.

(a) Démontrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en fonction de ℓ.

Dans la suite, on note $\mathscr{L}$ l'ensemble des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des applications f pour lesquelles il existe une constante K telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

On suppose désormais que f est un élément de $\mathscr{L}$.

Q3. Prouver que $\mathscr{L}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Q4. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A|x| + B$.

Q5. En déduire que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Q6. (a) Démontrer que la fonction F appartient à $\mathscr{L}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) - \lambda F(x + a) = f(x)$.

(b) Démontrer que F est l'unique élément $G \in \mathscr{L}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) - \lambda G(x + a) = f(x)$.

Q7. On suppose que f est la fonction constante définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
Démontrer que $f \in \mathscr{L}$ et déterminer la fonction F correspondante.

Q8. On suppose que f est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.
Démontrer que $f \in \mathscr{L}$ et déterminer la fonction F correspondante.

Exercice 2. Pile je gagne, Face tu perds

On dispose d'une pièce de monnaie qui donne « pile » avec probabilité $1/2$.

On effectue une infinité de fois des lancers successifs de cette pièce de manière indépendante.

On admet qu'on peut modéliser la situation par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note P_n (resp. F_n) l'évènement « le n-ième lancer donne pile (resp. face) ».

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et discrètes à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si X est l'une d'elles, on a donc $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Q9. Pour X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, démontrer que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$.

Q10. En utilisant une variable aléatoire de loi géométrique, démontrer que l'évènement « la pièce donne au moins une fois pile » est de probabilité 1.

Q11. Dans cette question on découpe les lancers par groupe de 3 lancers consécutifs et disjoints.
On note alors Y la variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y = n$ lorsque la séquence PPF apparaît pour pour la première fois lors du $(n+1)$-ième groupe de lancers (c'est-à-dire les lancers de rangs $3n+1$ à $3n+3$).
Par exemple l'évènement $\{Y = 2\}$ est réalisé lorsque les 3 premiers lancers n'ont pas donné PPF, les lancers de rang 4 à 6 non plus, par contre aux lancers de rangs 7, 8 et 9 on a obtenu successivement « pile », « pile » et « face ».
On dira aussi que $Y = +\infty$ lorsque la séquence PPF n'apparaît jamais.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y+1$ et en déduire que la séquence PPF apparaît au moins une fois avec probabilité 1.

On admettra dans la suite que n'importe quelle séquence apparaît au moins une fois avec probabilité 1.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le mot PP pour la première fois. D'après la propriété admise on sait donc que $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$.

Q12. Pour k un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note A_k l'évènement « les $(k-1)$-ième et k-ième lancers donnent pile ». Démontrer que :

$$\forall k \geq 4, \qquad \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \leq k-2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k)$$

Q13. En déduire que :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \geq k-1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k)$$

Q14. Rappeler le résultat du cours reliant l'espérance de Z et la série $\sum \mathbb{P}(Z \geq n)$.
L'utiliser pour démontrer que Z est d'espérance finie et déterminer sa valeur.

Q15. Établir que :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(Z = k+2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k+1)$$

et en déduire la fonction génératrice de Z.

Dans la suite deux joueurs appelés Alice et Bob s'affrontent lors des lancers de la pièce. Alice joue avec la séquence PPF et Bob avec la séquence FPP ; celui qui voit sa séquence apparaître en premier remporte la partie.

D'après le résultat admis la séquence PPFFPP apparaît au moins une fois avec probabilité 1 et donc la probabilité qu'un joueur soit déclaré gagnant est égale à 1 (c'est-à-dire que la partie ne peut pas durer une infinité de tours).

On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire égale au numéro du lancer à l'issue duquel Alice (resp. Bob) est déclaré(e) gagnant(e), si cela se produit, et à $+\infty$ si ce n'est pas Alice (resp. Bob) qui est déclaré(e) gagnant(e). On note aussi π_A (resp. π_B) la probabilité que Alice gagne (resp. Bob gagne), c'est- à-dire : $\pi_A = \mathbb{P}(X_A < +\infty)$ et $\pi_B = \mathbb{P}(X_B < +\infty)$.

Q16. On pose $T = \min(X_A, X_B)$. Que représente la variable aléatoire T ?

Q17. Soit $n \geq 2$. En remarquant que l'événement $\{T \geq n+1\} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}$ correspond soit à la victoire d'Alice au lancer $n+3$, ou à celle de Bob au lancer $n+1$, ou encore à celle de Bob au lancer $n+2$, démontrer que :

$$\frac{1}{8}\mathbb{P}(T \geq n+1) = \mathbb{P}(X_A = n+3) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_B = n+2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_B = n+1)$$

Q18. Soit $n \geq 2$. En procédant de même avec l'événement $\{T \geq n+1\} \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}$, démontrer que :

$$\frac{1}{8}\mathbb{P}(T \geq n+1) = \mathbb{P}(X_B = n+3) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_A = n+1)$$

Q19. Démontrer que $\pi_A + \pi_B = 1$ puis calculer la valeur de π_A et π_B. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 3. Racines carrées de matrices

Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel non nul, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Q20. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

Dans la suite, A et M sont deux matrices de $\mathcal{M}_n[\mathbb{K})$ qui commutent : $AM = MA$.

On suppose aussi que A admet n valeurs propres distinctes.

Q21. Démontrer que toute colonne propre de A est aussi colonne propre de M.

Q22. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}MP$ sont toutes les deux diagonales.

Q23. On considère à nouveau la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = A$ selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la dernière question on suppose que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

Q24. Démontrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que $M^2 = B$.