

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2025

Corrigé de l'épreuve de Sciences du numérique MPI

Le sujet est composé d'un problème et d'un questionnaire à choix multiples. Le questionnaire à choix multiples devra être inséré dans votre copie.

Les arbres de preuve demandés dans ce sujet devront utiliser les règles de la déduction naturelle listées en annexe.

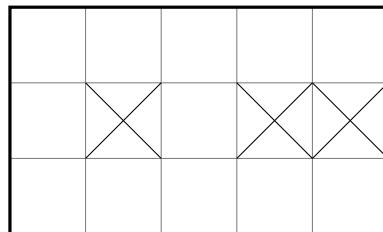
Les fonctions à produire dans ce sujet devront être rédigées en OCaml. Il est possible d'écrire des fonctions auxiliaires non explicitement demandées à condition de les documenter et de les définir avant d'en faire usage. Seules les primitives du langage OCaml ainsi que les fonctions des modules List, Array et Queue pourront être utilisées sans restrictions. La documentation de certaines de ces fonctions est rappelée en annexe.

Problème – Pavage d'une surface avec des dominos

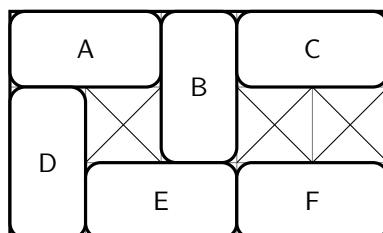
On considère une surface quadrillée composée de n rangées de p colonnes que l'on souhaite recouvrir avec des dalles de taille 1 par 2 que nous appellerons **dominos**. Les dominos ne peuvent être disposés que verticalement ou horizontalement. On fait de plus l'hypothèse que certaines cases du quadrillage peuvent comporter un **obstacle** (symbolisé par une croix) et ne sont donc pas à recouvrir.

L'objectif de ce problème est de déterminer un **pavage** de la surface, c'est-à-dire un recouvrement intégral, avec des dominos, des cases ne comportant pas d'obstacles.

Voici un exemple de surface de taille $n = 3$ par $p = 5$ comportant 3 obstacles :

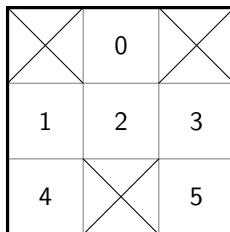


On peut pavier cette surface à l'aide de 6 dominos A, B, C, D, E et F de la façon suivante :



1 Dénombrement et déduction naturelle

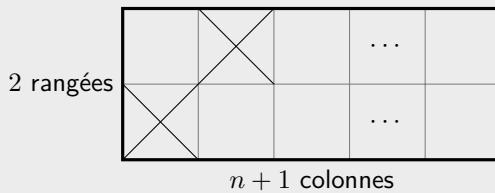
Question 1 Montrer par un raisonnement en langue française, qu'il n'existe qu'un seul pavage complet de la surface représentée ci-après et dont on a numéroté les cases.



Pour paver la case 0, il est nécessaire de mettre un domino recouvrant les cases 0 et 2. Il devient alors nécessaire de recouvrir d'un domino les cases 1 et 4 et d'un second les cases 3 et 5. Il n'y a donc qu'un seul pavage complet pour cette surface.

Question 2 Une surface quadrillée avec des obstacles qui comporterait un nombre pair de cases libres est-elle toujours pavable ? En est-il de même si la surface est sans obstacle ? On justifiera ses réponses.

Une surface quadrillée à $2n$ cases libres n'est pas toujours pavable, prenons l'exemple de la surface suivante pour $n \geq 1$:

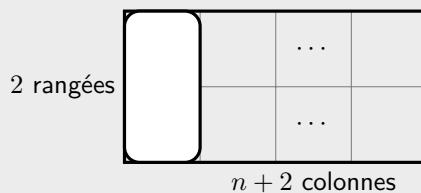


Cette configuration comporte $2(n + 1) - 2 = 2n$ cases libres mais n'est pas pavable car la case supérieure gauche ne peut pas être recouverte par un domino en raison des obstacles.

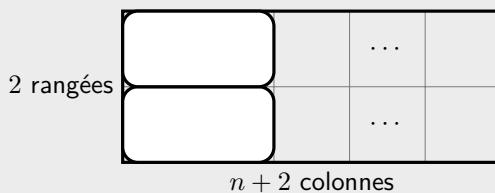
En revanche, une surface sans obstacles ayant un nombre pair de cases est toujours pavable. En effet, le nombre de rangées ou le nombre de colonnes est nécessairement pair, considérons, quitte à tourner la surface de 90 degrés que le nombre de rangées soit pair. Il suffit alors d'empiler verticalement les dominos sur chaque colonne pour obtenir un pavage.

Question 3 Considérons une surface sans obstacles de taille 2 par n et notons u_n le nombre de façons de paver cette surface, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On précisera les valeurs de u_1 et u_2 .

En plaçant un premier domino verticalement tout à gauche, il reste u_{n+1} façons de paver les $2(n+1)$ cases restantes :

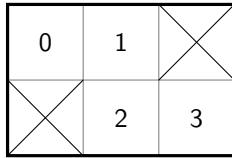


L'autre façon de paver la première colonne consiste à placer 2 dominos horizontaux l'un en dessous de l'autre :



Il reste alors u_n façons de paver les $2n$ cases restantes. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Enfin, on a $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$ (en plaçant 2 dominos verticalement ou horizontalement).

On considère à présent la surface suivante dont on a numéroté les cases sans obstacles :



Notons a la variable propositionnelle indiquant si un même domino est placé sur les cases 0 et 1, b celle indiquant si un même domino est placé sur les cases 1 et 2 et c celle indiquant si un même domino est placé sur les cases 2 et 3.

Question 4 Donner une formule propositionnelle φ_1 , exprimée sous forme normale disjonctive, traduisant le fait que la case numéro 1 doit être recouverte par exactement un domino.

$$\varphi_1 \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$$

Question 5 Donner une formule propositionnelle φ_2 , exprimée sous forme normale conjonctive, traduisant le fait que la case numéro 2 doit être recouverte par exactement un domino.

$$\varphi_2 \equiv \neg((\neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge c)) \equiv (b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$$

Question 6 Établir un arbre de preuve pour le séquent $\varphi_1, b \vdash \neg a$.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\varphi_1, b, a \wedge \neg b, a \vdash b \text{ (ax)} \quad \frac{\frac{\varphi_1, b, a \wedge \neg b, a \vdash a \wedge \neg b \text{ (ax)}}{\varphi_1, b, a \wedge \neg b, a \vdash \neg b \text{ (\wedge_e)}}}{\varphi_1, b, a \wedge \neg b, a \vdash \perp \text{ (\neg_e)}}}{\varphi_1, b, a \wedge \neg b \vdash \neg a \text{ (\neg_i)}}}{\varphi_1, b, a \wedge \neg b \vdash \neg a \text{ (\wedge_e)}}}{\varphi_1, b, \neg a \wedge b \vdash \neg a \wedge b \text{ (ax)}}}{\varphi_1, b, \neg a \wedge b \vdash \neg a \text{ (\vee_e)}}}{\varphi_1, b \vdash \neg a \text{ (ax)}}$$

Question 7 Établir un arbre de preuve pour le séquent $\varphi_2, b \vdash \neg c$.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\varphi_2, b, c \vdash b \text{ (ax)} \quad \frac{\varphi_2, b, c \vdash c \text{ (ax)}}{\varphi_2, b, c \vdash b \wedge c \text{ (\wedge_i)}}}{\varphi_2, b, c \vdash (b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \text{ (\wedge_e)}}}{\varphi_2, b, c \vdash \neg b \vee \neg c \text{ (\wedge_e)}}}{\varphi_2, b, c \vdash \neg(b \wedge c) \text{ (\neg_e)}}}{\varphi_2, b, c \vdash \perp \text{ (\neg_i)}}}{\varphi_2, b \vdash \neg c \text{ (\neg_e)}}$$

Question 8 On définit la formule propositionnelle φ_3 : $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$. Pourquoi faut-il que φ_3 soit satisfaite dans le cadre de notre problème ?

On cherche à pavier 4 cases, il faut donc pour cela utiliser exactement 2 dominos, ce que décrit la contrainte φ_3 .

Question 9 Indiquer, au moyen d'une table de vérité, ce que l'on peut dire du séquent : $\varphi_3, b \vdash a \vee c$.

Dressons la table de vérité de φ_3 et indiquons celle de $\varphi_3 \wedge b \Rightarrow a \vee c$.

a	b	c	φ_3	$\varphi_3 \wedge b$	$a \vee c$	$\varphi_3 \wedge b \Rightarrow a \vee c$
F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V

Dès lors $\varphi_3 \wedge b \Rightarrow a \vee c$ est une tautologie et il existe donc un arbre de preuve pour le séquent : $\varphi_3, b \vdash a \vee c$.

Question 10 À partir des séquents prouvés précédemment, construire un arbre de preuve du séquent $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \neg b$. Expliquer ce que cela traduit concernant la configuration des dominos pour le problème.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi_1, b \vdash \neg a \quad \varphi_2, b \vdash \neg c}{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b \vdash \neg a} \text{ (aff)} \quad \frac{\varphi_2, b \vdash \neg c}{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b \vdash \neg c} \text{ (aff)} \\
 \frac{\varphi_3, b \vdash a \vee c}{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b \vdash a \vee c} \text{ (aff)} \quad \frac{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b \vdash \neg a \wedge \neg c}{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b \vdash \neg(a \vee c)} \text{ (}\neg_e\text{)} \\
 \frac{}{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, b \vdash \perp} \text{ (}\neg_i\text{)} \\
 \frac{}{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \neg b}
 \end{array}$$

On en déduit que les solutions du problème n'ont pas de domino à cheval sur les cases 1 et 2.

Question 11 Existe-t'il un arbre de preuve du séquent $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \neg a$? On justifiera sa réponse.

On remarque que la formule $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \Rightarrow \neg a$ n'est pas une tautologie car elle n'est pas vérifiée pour la valuation $(a, b, c) = (V, F, V)$ donc il ne peut pas exister d'arbre de preuve pour le séquent $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \neg a$.

2 Recherche d'un couplage maximum dans un graphe biparti

On fait l'hypothèse, **pour tout le reste du problème**, que les graphes manipulés sont connexes.

On rappelle qu'un graphe $G = (S, A)$ est **biparti** s'il existe une partition de S en deux ensembles S_1 et S_2 tels que les arcs de A ont une de leurs extrémités dans S_1 et l'autre dans S_2 . On rappelle également qu'un graphe est **bicolorable** s'il est possible d'attribuer une couleur à chacun de ses sommets de façon à utiliser au plus 2 couleurs différentes et que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

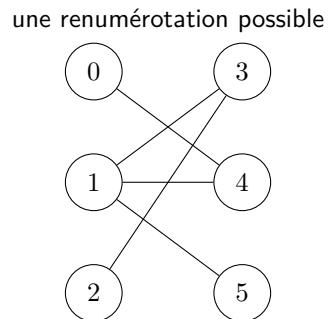
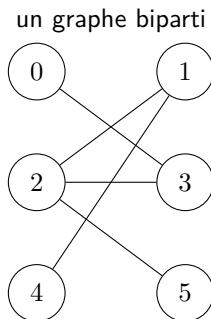
Quitte à renuméroter les sommets des graphes considérés, on choisit de représenter les graphes bipartis par le type :

```
type b_graph =
{
  n1 : int;
  n2 : int;
  voisins : int list array
}
;;
```

où $n1$ est le cardinal de S_1 , $n2$ celui de S_2 et $voisins$ est la représentation par listes d'adjacence du graphe.

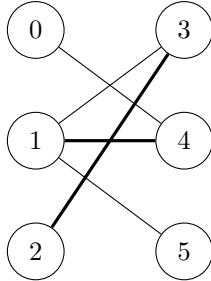
Les sommets de S_1 étant alors **renumérotés** de 0 à $n_1 - 1$ et ceux de S_2 de n_1 à $n_1 + n_2 - 1$. La renumérotation des sommets sera représentée par un tableau de $n_1 + n_2$ entiers de sorte que la case d'indice i contienne le nouveau numéro du sommet i .

Par exemple :



Ainsi `{n1=3; n2=3; voisins = [| [4]; [3;4;5]; [3]; [1;2]; [0;1]; [1] |]}` pourra représenter le graphe de l'exemple ci-dessus et `[|0;3;1;4;2;5|]` la renumérotation qui lui est associée.

On rappelle qu'un **couplage** d'un graphe est un ensemble d'arêtes du graphe deux à deux non incidentes (c'est-à-dire n'ayant pas de sommet en commun). Par exemple l'ensemble des arêtes $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ est un couplage du graphe biparti suivant :



Le **cardinal** d'un couplage est le nombre d'arêtes qui le composent. Un couplage d'un graphe est dit **maximum** lorsqu'il n'existe pas de couplage du graphe dont le cardinal lui serait strictement supérieur.

On choisit de représenter les couplages par un tableau indexé par les sommets du graphe. Le contenu de la case d'indice i contient le numéro du sommet avec lequel i est couplé, et -1 sinon.

Question 12 Donner le tableau représentant le couplage ci-dessus.

`[-1;4;3;2;1;-1]`

Question 13 Écrire une fonction `cardinal : int array -> int` prenant en paramètre un couplage et retournant son cardinal.

```
let cardinal c =
  let nb = ref 0 in
  for i=0 to (Array.length c)-1 do
    if c.(i)>(-1) then incr nb
  done;
  !nb/2
;;
```

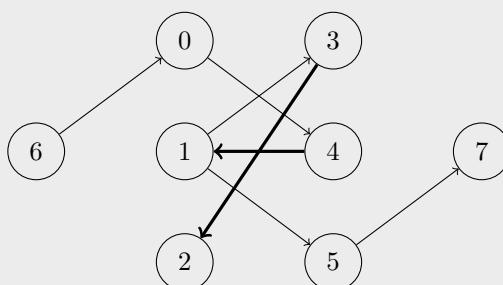
On rappelle qu'un sommet est **libre** vis-à-vis d'un couplage s'il n'est l'extrémité d'aucune arête du couplage.

Le **graphe d'augmentation** associé à un couplage C d'un graphe biparti G est le graphe orienté obtenu à partir de G en appliquant les transformations suivantes :

1. *orientation des arêtes* :
 - les arêtes appartenant au couplage C sont orientées des sommets de S_2 vers ceux de S_1 ;
 - les arêtes n'appartenant pas au couplage C sont orientées des sommets de S_1 vers ceux de S_2 ;
2. *ajout de sommets* : on ajoute deux nouveaux sommets s et t , respectivement numérotés n_1+n_2 et n_1+n_2+1 ;
3. *ajout d'arcs* :
 - on ajoute pour chaque sommet x de S_1 et libre vis-à-vis de C , un arc allant de s vers x ;
 - on ajoute pour chaque sommet y de S_2 et libre vis-à-vis de C , un arc allant de y vers t .

Les graphes d'augmentation seront également représentés par le type `b_graph`.

Question 14 Dessiner le graphe d'augmentation associé au couplage et au graphe de l'exemple précédent.



Question 15 Écrire une fonction `graphe_augmentation` : `b_graph` \rightarrow `int array` \rightarrow `b_graph` construisant le graphe d'augmentation d'un graphe biparti et d'un couplage du graphe donnés. On prendra soin de retourner un graphe indépendant de celui passé en paramètre.

```

let est_libre c i = c.(i)=(-1);;

let rec filter c i vi = match vi with
| []  -> []
| t::q -> if c.(i)=t then
    (
        if i>t then t::(filter c i q)
        else filter c i q
    )
    else
    (
        if i<t then t::(filter c i q)
        else filter c i q
    )
;;
;

let graphe_augmentation bg c =
    let n = Array.length c in
    let v = Array.make (n+2) [] in
    for i=0 to n-1 do
        v.(i) <- filter c i bg.voisins.(i);
        if est_libre c i then
        (
            if i<bg.n1 then v.(n) <- i::v.(n)
            else v.(i) <- (n+1)::v.(i)
        )
    done;
    {n1=bg.n1; n2=bg.n2; voisins=v}
;;

```

On appelle **chemin augmentant** tout chemin du graphe d'augmentation menant de s à t .

Question 16 Écrire une fonction `chemin_augmentant` : `b_graph` \rightarrow `int` `list` prenant en paramètre le graphe d'augmentation associé à un graphe et à un de ses couplages. Lorsqu'il existe un chemin menant de s à t , la fonction renverra la liste des sommets rencontrés dans l'ordre de parcours du chemin (sans s et t). Si un tel chemin n'existe pas, la fonction renverra la liste vide.

```

let chemin_augmentant bg_a =
    let chemin = ref [] and vus = Array.make (bg_a.n1+bg_a.n2+2) false in
    let rec parcours_profondeur sommets dest = match sommets with
    | []  -> false
    | t::q when t=dest  -> true
    | t::q when vus.(t) -> false
    | t::q -> vus.(t) <- true;
        if parcours_profondeur bg_a.voisins.(t) dest then
        (
            chemin := t::(!chemin);
            true
        )
        else parcours_profondeur q dest
    in
    if parcours_profondeur bg_a.voisins.(bg_a.n1+bg_a.n2) (bg_a.n1+bg_a.n2+1) then
        !chemin
    else []
;;

```

Question 17 Pourquoi un chemin augmentant comporte-t-il toujours un nombre pair de sommets ?

Un chemin augmentant débute toujours par un arc allant de s à un sommet de S_1 et termine toujours par un arc allant de S_2 à t , dès lors il est nécessairement de la forme $(s, x_1, x_2, \dots, x_p, t)$ où (x_1, \dots, x_p) est un chemin allant d'un sommet de S_1 à un sommet de S_2 . Puisqu'il n'existe pas d'arcs allant à s , ni d'arc sortant de t , les sommets x_1, \dots, x_p sont nécessairement des sommets de $S_1 \cup S_2$, donc les arêtes sur chemin (x_1, \dots, x_p) sont des arêtes du graphe initial. Ce graphe étant biparti selon la partition (S_1, S_2) , les sommets x_1, \dots, x_p sont nécessairement composés d'une alternance de sommets de S_1 et de S_2 ; il comporte donc un nombre impair d'arcs et un nombre pair de sommets. Ainsi les chemins augmentant comportent toujours un nombre pair de sommets.

Question 18 Écrire une fonction `augmenter_coupleage` : `int array -> int list -> unit` qui, étant donné un coupleage et un chemin augmentant de ce coupleage, remplace le coupleage passé en paramètre par un coupleage de cardinal strictement supérieur.

```
let rec augmenter_coupleage c chemin = match chemin with
| []          -> ()
| [_]         -> failwith "le chemin augmentant devrait avoir un nombre pair de sommets"
| s1::s2::q -> c.(s1)<-s2; c.(s2)<-s1; augmenter_coupleage c q
;;
```

Question 19 Écrire une fonction `couplage_max` : `b_graph -> int array` qui, étant donné un graphe biparti, retourne un coupleage maximum.

```
let couplage_max bg =
  let c = Array.make (bg.n1+bg.n2) (-1) in
  let chemin_a = ref (chemin_augmentant (graphe_augmentant bg c)) in
  while !chemin_a <> [] do
    augmenter_coupleage c (!chemin_a);
    chemin_a := (chemin_augmentant (graphe_augmentant bg c))
  done;
  c
;;
```

3 Retour au problème de pavage

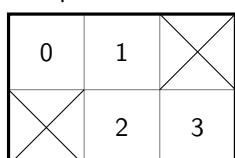
On considère le problème de décision PAVABLE qui, à partir des dimensions d'une surface quadrillée et de la liste de ses obstacles, indique si la surface peut ou non être pavée.

Question 20 Le problème PAVABLE est-il dans la classe NP ? On justifiera sa réponse.

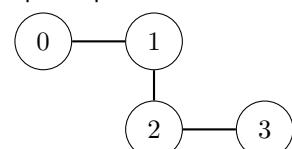
Ce problème fait partie de la classe NP car il est possible de vérifier qu'un ensemble de dominos placés forme un pavage en temps polynomial ; en effet il suffit pour cela de parcourir les dominos en marquant les cases qu'ils pavent puis de vérifier que toutes les cases sont marquées une et une seule fois.

On choisit de numéroté de gauche à droite et de haut en bas l'ensemble des m cases sans obstacle par les entiers consécutifs de 0 à $m-1$. On représente la surface par un graphe non orienté et non pondéré. L'ensemble des sommets est l'ensemble des numéros des cases sans obstacles et on considère que deux sommets sont adjacents si et seulement si les cases qu'ils représentent se touchent horizontalement ou verticalement. Les graphes seront représentés par leurs listes d'adjacence au moyen du type `int list array` (la case i contient la liste des voisins du sommet i). En voici un exemple :

Surface quadrillée numérotée



Graphe représentant la surface



Le graphe sera alors représenté par le tableau `[| [1]; [0;2]; [1;3]; [2] |]`.

Pour simplifier on fera l'hypothèse, comme précisé dans la partie précédente, que l'on ne manipulera que des graphes connexes.

Question 21 Montrer qu'un graphe non orienté quelconque est biparti si et seulement si il est bicolorable.

- Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti de partition (S_1, S_2) . En colorant tous les sommets de S_1 par la couleur blanche et ceux de S_2 par la couleur noire, on obtient un graphe coloré par au plus 2 couleurs. De plus puisque le graphe est biparti, toutes ses arêtes relient un sommet de S_1 à un sommet de S_2 ; ainsi deux sommets adjacents ont une couleur différente. Le graphe est bien bicolorable.
- Réciproquement, considérons $G = (S, A)$ un graphe bicolorable. Construisons S_1 comme étant l'ensemble des sommets d'une même couleur et S_2 l'ensemble des sommets de l'autre couleur. Tous les sommets étant colorés et chaque sommet admettant au plus une couleur, on obtient que (S_1, S_2) est une partition de S . De plus il ne peut exister d'arêtes reliant deux sommets de S_1 ou deux sommets de S_2 sinon on aurait existence de 2 sommets adjacents de même couleur, ce qui est impossible. Le graphe G est donc bien biparti.

Finalement un graphe non orienté quelconque est biparti si et seulement si il est bicolorable.

Question 22 Montrer que le graphe représentant une surface est toujours bicolorable.

Considérons que la surface ne comporte pas d'obstacles. On colore les cases de la surface à l'aide de 2 couleurs (blanc et noir) en damier, en commençant par attribuer la couleur blanche à la case supérieure gauche. On reporte alors les couleurs des cases aux sommets qui les représentent. On a alors coloré le graphe avec au plus 2 couleurs et 2 sommets qui ont la même couleur ne peuvent être adjacents de la la répartition en damier des couleurs.

Dans le cas où la surface comporte des obstacles, il suffit de procéder comme si elle n'en comportait pas puis de supprimer les sommets associés aux obstacles et enfin à renommer les sommets du graphe pour obtenir une bicoloration du graphe.

Question 23 Écrire une fonction `creer_b_graph : int list array -> b_graph * int array` prenant en paramètre un graphe biparti G représenté par listes d'adjacence. La fonction retournera une représentation de ce graphe sous le type `b_graph` ainsi que la renomérotation adoptée pour l'ensemble de ses sommets.

```
let creer_b_graph l_adj =
  let n=Array.length l_adj and i1 = ref 0 and i2 = ref 0 in
  let couleur = Array.make n (-1) and numeros = Array.make n (-1)
  and l_adj2 = Array.make n [] in
  let rec parcours sommets coul suivants = match suivants,sommets with
  | [],[] -> ()
  | _,[] -> parcours suivants (1-coul) []
  | _,t::q -> couleur.(t) <- coul;
    if coul=0 then (numeros.(t) <- !i1; incr i1)
    else (numeros.(t) <- !i2; incr i2);
    parcours q coul (insere_liste l_adj.(t) suivants)
  and insere_liste l1 l2 = match l1 with
  | [] -> l2
  | t::q -> if couleur.(t)=(-1) then insere_liste q (insere t l2)
    else insere_liste q l2
  and insere x l = match l with
  | [] -> [x]
  | t::q -> if x<t then x::l
    else if x=t then l
    else t::(insere x q)
  and traduire sommets = match sommets with
  | [] -> []
  | t::q -> (numeros.(t))::(traduire q)
  in
```

```

parcours [0] 1 [];
for i=0 to n-1 do
    numeros.(i) <- numeros.(i)+couleur.(i)*(!i1)
done;
for i=0 to n-1 do
    l_adj2.(numeros.(i)) <- traduire l_adj.(i)
done;
{n1 = !i1; n2 = !i2; voisins = l_adj2},numeros
;;

```

Question 24 Expliquer comment résoudre le problème PAVABLE et indiquer les conclusions que l'on peut en tirer concernant sa classe de complexité.

- Chaque placement, sans recouvrement, des dominos sur la surface correspond à un couplage du graphe associé. En effet, lorsqu'un domino est placé sur les cases numéros i et j , on peut lui associer l'arête reliant les sommets i et j . En sélectionnant toutes ses arêtes, on obtient bien un couplage du graphe car si deux de ces arêtes étaient incidentes, les deux dominos se recouvreraient sur une même case.
- Réciproquement, tout couplage du graphe associé à une surface correspond à un placement, sans recouvrements, de dominos sur la surface. En effet, pour chaque arête $\{i, j\}$ d'un couplage, on peut choisir de poser un domino recouvrant les cases i et j et aucun de ces dominos ne se recourent sinon il existerait 2 arêtes incidentes dans le couplage.

Ainsi pour résoudre le problème PAVABLE, il suffit de déterminer un couplage maximum du graphe associé. Si le nombre de cases à paver est égal à deux fois le cardinal du couplage (un domino couvre deux sommets), on en déduit qu'il existe un pavage de la surface ; dans le cas contraire, il n'en existe pas.

Construire le graphe associé à un pavage, résoudre le problème du couplage maximum dans un graphe biparti et déterminer le cardinal du couplage se faisant en temps polynomial, on en déduit que PAVABLE est dans P.

Dans ce questionnaire à choix multiples, chaque question comporte une ou plusieurs bonnes réponses.

Chaque réponse correcte fait gagner des points, mais chaque réponse fausse annule tous les points de la question.

Les questions peuvent-être formulées au pluriel par commodité d'expression. Cela n'implique pas nécessairement qu'elles admettent plusieurs réponses correctes.

On considère la fonction, écrite en langage C, suivante :

```
int mystere(int m, int n)
{
    int t=1;
    if (n>0)
    {
        t = mystere(m,n/2);
        t = t*t;
        if (n%2==1)
            t=m*t;
    }
    return t;
}
```

1. La fonction `mystere` :

- effectue un nombre linéaire d'appels récursifs en `n` quand `n` est une puissance de 2 ;
- effectue un nombre quadratique d'appels récursifs en `n` quand `n` est une puissance de 2 ;
- permet de calculer les puissances d'un nombre ;
- permet de calculer le produit de deux nombres.

2. L'ensemble des langages réguliers est stable :

- par intersection finie ;
- par union finie ;
- par union infinie ;
- par passage au complémentaire.

3. L'algorithme de Kosaraju permet de :

- déterminer les composantes fortement connexes d'un graphe orienté ;
- déterminer un plus court chemin entre tout couple de sommets d'un graphe orienté ;
- déterminer un arbre couvrant de poids minimal d'un graphe non orienté pondéré ;
- déterminer un automate fini acceptant le langage dénoté par une expression régulière.

4. Parmi les algorithmes suivants, indiquer ceux opérant sur des graphes.

- l'algorithme de Kruskal ;
- l'algorithme de Boyer-Moore ;
- l'algorithme de Quine ;
- l'algorithme de Dijkstra.

5. La formule propositionnelle $(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$:

- est sous forme normale conjonctive ;
- est sous forme normale disjonctive ;
- est satisfiable ;
- est équivalente à $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

Annexe A – règles de la déduction naturelle

On se donne les règles suivantes de la déduction naturelle où $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ et ψ désignent des formules logiques et Γ un ensemble de formules logiques. De plus \top désigne la tautologie et \perp l'antilogie (ou contradiction).

Axiome	Affaiblissement	
$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$ (aff)	
	Élimination	Introduction
\top et \perp	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$ (\perp_e)	$\frac{}{\Gamma \vdash \top}$ (\top_i)
\wedge	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1}$ (\wedge_e) $\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2}$ (\wedge_e)	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}$ (\wedge_i)
\vee	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ (\vee_e)	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}$ (\vee_i) $\frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}$ (\vee_i)
\rightarrow	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$ (\rightarrow_e)	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$ (\rightarrow_i)
\neg	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash \perp}$ (\neg_e)	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi}$ (\neg_i)

On s'autorisera également l'emploi des deux règles suivantes sans en fournir d'arbre de preuve :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi_1 \vee \neg \varphi_2}{\Gamma \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)} \text{ (}\wedge_{\text{dm}}\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg \varphi_1 \wedge \neg \varphi_2}{\Gamma \vdash \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)} \text{ (}\vee_{\text{dm}}\text{)}$$

Annexe B – extraits de la documentation OCaml¹

Extraits concernant le module Array pour manipuler des tableaux

val length : 'a array -> int

Return the length (number of elements) of the given array.

val make : int -> 'a -> 'a array

make n x returns a fresh array of length n, initialized with x. All the elements of this new array are initially physically equal to x (in the sense of the == predicate). Consequently, if x is mutable, it is shared among all elements of the array, and modifying x through one of the array entries will modify all other entries at the same time.

val copy : 'a array -> 'a array

copy a returns a copy of a, that is, a fresh array containing the same elements as a.

val iter : ('a -> unit) -> 'a array -> unit

iter f a applies function f in turn to all the elements of a.

It is equivalent to f a.(0); f a.(1); ...; f a.(length a - 1); ().

val map : ('a -> 'b) -> 'a array -> 'b array

map f a applies function f to all the elements of a, and builds an array with the results returned by f : [f a.(0); f a.(1); ...; f a.(length a - 1)].

val for_all : ('a -> bool) -> 'a array -> bool

for_all f [|a1; ...; an|] checks if all elements of the array satisfy the predicate f.

That is, it returns (f a1) && (f a2) && ... && (f an).

1. Sources : <https://ocaml.org/manual/5.2/api/Array.html>, <https://ocaml.org/manual/5.2/api>List.html> et <https://ocaml.org/manual/5.2/api/Queue.html>

```
val exists : ('a -> bool) -> 'a array -> bool
exists f [|a1; ...; an|] checks if at least one element of the array satisfies the predicate f.
That is, it returns (f a1) || (f a2) || ... || (f an).
```

Extraits du module List pour manipuler des listes

```
val length : 'a list -> int
```

Return the length (number of elements) of the given list.

```
val hd : 'a list -> 'a
```

Return the first element of the given list.

```
val tl : 'a list -> 'a list
```

Return the given list without its first element.

```
val rev : 'a list -> 'a list
```

List reversal.

```
val iter : ('a -> unit) -> 'a list -> unit
```

iter f [|a1; ...; an|] applies function f in turn to [|a1; ...; an|]. It is equivalent to f a1; f a2; ...; f an.

```
val map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
```

map f [|a1; ...; an|] applies function f to a1, ..., an, and builds the list [|f a1; ...; f an|] with the results returned by f.

```
val fold_left : ('acc -> 'a -> 'acc) -> 'acc -> 'a list -> 'acc
```

fold_left f init [|b1; ...; bn|] is f (... (f (f init b1) b2) ...) bn.

```
val for_all : ('a -> bool) -> 'a list -> bool
```

for_all f [|a1; ...; an|] checks if all elements of the list satisfy the predicate f.

That is, it returns (f a1) && (f a2) && ... && (f an) for a non-empty list and true if the list is empty.

```
val exists : ('a -> bool) -> 'a list -> bool
```

exists f [|a1; ...; an|] checks if at least one element of the list satisfies the predicate f.

That is, it returns (f a1) || (f a2) || ... || (f an) for a non-empty list and false if the list is empty.

```
val mem : 'a -> 'a list -> bool
```

mem a set is true if and only if a is equal to an element of set.

Extraits concernant le module Queue pour manipuler des files

```
val create : unit -> 'a t
```

Return a new queue, initially empty.

```
val push : 'a -> 'a t -> unit
```

push x q adds the element x at the end of the queue q.

```
val pop : 'a t -> 'a
```

pop q removes and returns the first element in queue q, or raises Queue.Empty if the queue is empty.

```
val is_empty : 'a t -> bool
```

Return true if the given queue is empty, false otherwise.

Fin du corrigé