Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2025

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques PT - TSI

76 points

■ Exercice : Racine carrée d'une matrice — 14 points

Notons $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels. Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Justifier que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. **(2 points)**

Corrigé. La matrice A est symétrique et à coefficients réels donc d'après le théorème spectral,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

2) Déterminer les valeurs propres de A. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ? **(3 points)**

Corrigé. Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & 1-X & X-2 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & X-3 \\ 1 & 1-X & X-2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dev. 2ème col.}}{=} -(1-X) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ 2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)\Big[(X-2)(X-3)-2\Big] = (X-1)(X^2-5X+4)$$

$$= (X-1)^2(X-4).$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4\}.}$$

Puisque A est symétrique et à coefficients réels, alors d'après le cours :

$$\boxed{\text{les espaces propres } E_1(A) \text{ et } E_4(A) \text{ sont orthogonaux.}}$$

3) La matrice A est-elle inversible ? **(1 point)**

Corrigé. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, alors :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible.}}$$

4) Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PDP^{-1}.$$

(4 points)

Corrigé. Puisque A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors $\dim\big(E_1(A)\big) = 2$ et $\dim\big(E_4(A)\big) = 1$ donc $E_1(A)$ est une plan vectoriel et $E_4(A)$ un droite vectorielle. On a :

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc le vecteur unitaire $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige la droite vectorielle $E_4(A)$. Puisque $E_1(A) \perp E_4(A)$, on peut poser $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur unitaire et orthogonale à e_1, donc appartenant à $E_1(A)$. On pose ensuite $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur unitaire et orthogonal à e_1, donc appartient à $E_1(A)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs propres pour A. En notant :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

on a donc $A = PDP^{-1}$. De plus, la matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées : la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base (e_1, e_2, e_3) ; donc P est une matrice orthogonale.

5) Déterminer une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\Delta^2 = D$. **(2 points)**

Corrigé. Par exemple, la matrice diagonale :

$$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

vérifie $\Delta^2 = D$ donc Δ convient.

6) En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = A$. **(2 points)**

Corrigé. Par exemple, la matrice :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1}}$$

vérifie :

$$M^2 = \left(P\Delta P^{-1}\right)^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A,$$

donc M convient.

■ Problème : La formule des compléments d'Euler $\boxed{\textbf{62 points}}$

Dans ce problème, on démontre une relation entre la fonction Gamma d'Euler et la fonction sinus. Nous l'appliquons ensuite au calcul de l'intégrale de Gauss.

Dans tout le problème, la lettre a désignera un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

Partie 1 : Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre (22 points)

Considérons les intégrales suivantes :

$$I(a) = \int_0^1 \frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J(a) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t.$$

1) Démontrer que l'intégrale $I(a)$ est convergente. **(2 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^a(1+t)}$ est continue sur $]0,1]$.
- On a l'équivalent entre fonctions positives $\dfrac{1}{t^a(1+t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$, et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^a}\,\mathrm{d}t$ est convergente car $a < 1$.

D'après le théorème de comparaison par équivalence :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I(a) \text{ est convergente.}}$$

2) Démontrer que l'intégrale $J(a)$ est convergente. **(2 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^a(1+t)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
- On a l'équivalent entre fonctions positives $\dfrac{1}{t^a(1+t)} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+1}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}\,\mathrm{d}t$ est convergente car $a+1 > 1$.

D'après le théorème de comparaison par équivalence :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J(a) \text{ est convergente.}}$$

3) À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, démontrer que $J(a) = I(1-a)$. **(2 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ dans l'intégrale $J(a)$. Alors $t = \dfrac{1}{u}$, donc $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$, ce qui donne :

$$J(a) = \int_1^0 \frac{1}{u^{-a}(1+u^{-1})} \times -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{u^{1-a}(u+1)}\,\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{J(a) = I(1-a).}$$

4) Soit N un entier naturel.

(a) Démontrer que, pour tout réel t appartenant à $[0,1]$, on a : **(2 points)**

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} - (-1)^{N+1}\frac{t^{N+1}}{1+t}.$$

Corrigé. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. Puisque $-t \neq 1$, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{N}(-t)^n = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}.$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} - (-1)^{N+1}\frac{t^{N+1}}{1+t}.}$$

(b) En déduire que : **(2 points)**

$$I(a) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^{n-a}\mathrm{d}t + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1]$. En multipliant l'égalité précédente par le réel non nul $\frac{1}{t^a}$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{n-a} = \frac{1}{t^a(1+t)} - (-1)^{N+1}\frac{t^{N+1-a}}{1+t}.$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 1, et en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^{n-a}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^a(1+t)}\,\mathrm{d}t}_{=\,I(a)} - (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

c'est-à-dire, en isolant $I(a)$:

$$\boxed{I(a) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^{n-a}\mathrm{d}t + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t.}$$

5) Démontrer que pour tout entier naturel N : **(3 points)**

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{N+2-a},$$

puis déterminer la valeur de $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t.$

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $1+t \geqslant 1$, donc :

$$0 \leqslant \frac{t^{N+1-a}}{1+t} \leqslant t^{N+1-a}$$

puis par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{N+1-a}\,\mathrm{d}t.$$

Or :

$$\int_0^1 t^{N+1-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{N+2-a}}{N+2-a}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{N+2-a},$$

donc on obtient :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{N+2-a}.}$$

Puisque $\dfrac{1}{N+2-a} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\mathrm{d}t = 0.}$$

6) Vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n-a+1}$ est convergente et démontrer que sa somme vaut $I(a)$. **(2 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. La suite $\left(\dfrac{1}{n-a+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, donc la série alternée :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n-a+1} \text{ est convergente.}}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 t^{n-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1-a}}{n+1-a}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1-a},$$

donc par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question **4)** (b) et en utilisant la question **5)**, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-a+1} = I(a).}$$

7) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a}$ est convergente et démontrer que sa somme vaut $J(a)$.

(2 points)

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. On a montré dans la question **6)** que pour tout $b \in]0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n-b+1}$ est convergente et que sa somme vaut $I(b)$. En particulier, si $b = 1-a \in]0,1[$, on obtient que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+a}$ est convergente et que sa somme vaut $I(1-a)$ c'est-à-dire, en effectuant un changement de variable, que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a} \text{ est convergente et sa somme vaut } I(1-a) = J(a).}$$

8) En déduire que : **(2 points)**

$$I(a)+J(a)=\frac{1}{1-a}+2(a-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-(1-a)^2}.$$

Corrigé. Soit $a\in]0,1[$. Puisque les séries $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1-a}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a}$ sont convergentes, alors par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}
I(a)+J(a) &= \frac{1}{1-a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+1-a}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a}\right]\\
&= \frac{1}{1-a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{n+(1-a)}-\frac{1}{n-(1-a)}\right)(-1)^n\right]\\
&= \frac{1}{1-a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n-(1-a)-n-(1-a)}{n^2-(1-a)^2}(-1)^n\right]
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{I(a)+J(a)=\frac{1}{1-a}+2(a-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-(1-a)^2}.}$$

On admet que l'on a la formule suivante, valable pour tout réel λ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}\lambda}{n^2-\lambda^2}=\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}-\frac{1}{\lambda}.$$

9) Conclure que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$. **(3 points)**

Corrigé. Soit $a\in]0,1[$. En appliquant la formule de l'énoncé avec $\lambda=1-a$ qui est un réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$, on obtient :

$$2(a-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-(1-a)^2}=\frac{\pi}{\sin\left((1-a)\pi\right)}-\frac{1}{1-a}.$$

De plus, on a :

$$\sin\left((1-a)\pi\right)=\sin(\pi-a\pi)=\sin(\pi)\cos(a\pi)-\sin(a\pi)\cos(\pi)=\sin(a\pi)$$

donc d'après la question **8)**, on obtient :

$$I(a)+J(a)=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Finalement, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}.}$$

Partie 2 : La fonction Gamma d'Euler (25 points)

Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} \forall x > 0, & \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ \forall x \geqslant 0, & f_a(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}\mathrm{d}t \end{cases}.$$

10) Démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$. **(3 points)**

Corrigé. Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Il y a deux intégrales à étudier :

$$\Gamma_1(x) := \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma_2(x) := \int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

- On a l'équivalent de fonctions positives : $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ est convergente (car $1-x < 1$), donc d'après le théorème de comparaison par équivalence, l'intégrale $\Gamma_1(x)$ est convergente.
- On a $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car par croissance comparée :

$$t^2 \times t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

  et la fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc d'après le théorème de comparaison pour les petits o, l'intégrale $\Gamma_2(x)$ est convergente.

Ainsi, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente pour tout réel $x > 0$ c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[.}$$

11) (a) Démontrer que la fonction f_a est continue sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f_a(0)$. **(3 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. La fonction $\varphi_a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}$ vérifie les hypothèses suivantes.

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \varphi_a(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \varphi_a(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a la majoration :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\varphi_a(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{t^a(1+t)}$$

  et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^a(1+t)}$ est continue, indépendante de x et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question **9)**.

D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

En particulier, la fonction f_a est continue en 0 donc d'après la question **9)** :

$$\boxed{f_a(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.}$$

(b) Soient $a \in]0,1[$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Démontrer que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$.
En déduire que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On précisera l'expression de sa dérivée avec le symbole intégrale. **(4 points)**

Corrigé. Soient $a \in]0,1[$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. La fonction $\varphi_a : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}$ vérifie les hypothèses suivantes.

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \varphi_a(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$.
- Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, la fonction $t \mapsto \varphi_a(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ce qui a été fait dans la question **11)** (a).
- Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi_a}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^{a-1}(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- On a la majoration :

$$\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_a}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^{1-a}\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

  De plus, la fonction $t \mapsto t^{1-a}\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, indépendante de x et on a $t^{1-a}\mathrm{e}^{-\alpha t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction $t \mapsto t^{1-a}\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\alpha,\beta] \text{ et } \forall x \in [\alpha,\beta], \quad f_a'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^{a-1}(1+t)}\,\mathrm{d}t.}$$

On a donc démontré que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment inclus dans l'intervalle $]0,+\infty[$, donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0, \quad f_a'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^{a-1}(1+t)}\,\mathrm{d}t.}$$

12) (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : **(3 points)**

$$f_a(x) - f_a'(x) = \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

On pourra effectuer le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale $f_a(x) - f_a'(x)$.

Corrigé. Soient $a \in]0,1[$ et $x > 0$. On a par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
f_a(x) - f_a'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^{a-1}(1+t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)} + \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} t^{-a}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = xt$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ dans l'intégrale $f_a(x) - f_a'(x)$. Alors $t = \dfrac{u}{x}$, donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}u$, ce qui donne :

$$f_a(x) - f_a'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{-a} \mathrm{e}^{-u} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^{1-a}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{-a}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.}_{=\,\Gamma(1-a)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f_a(x) - f_a'(x) = \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.}$$

(b) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a : **(2 points)**

$$0 \leqslant f_a(x) \leqslant \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

Corrigé. Soient $a \in]0,1[$ et $x > 0$.

- On a d'une part, par positivité de l'intégrale $f_a(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^a(1+t)}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \geqslant 0$.
- D'autre part, comme $f_a'(x) \leqslant 0$, alors $-f_a'(x) \geqslant 0$, donc :

$$f_a(x) \leqslant f_a(x) - f_a'(x) \underset{\mathbf{12)}(b)}{\leqslant} \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad 0 \leqslant f_a(x) \leqslant \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.}$$

(c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$. **(1 point)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. Puisque $1-a \in]0,1[$, alors $\dfrac{1}{x^{1-a}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc $\dfrac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. On en déduit d'après la question **12)** (b) et le théorème d'encadrement que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = 0.}$$

13) Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. **(2 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Il y a deux intégrales à étudier :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \,\mathrm{d}t.$$

- On a l'équivalent entre fonctions positives $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-a}}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-a}} \,\mathrm{d}t$ est convergente car $1-a < 1$. D'après le théorème de comparaison par équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \,\mathrm{d}t$ est convergente, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}}$ est intégrable sur $]0,1]$.
- On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car par croissance comparée :

$$t^2 \times \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} = t^{a+1}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

et la fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc d'après le théorème de comparaison pour les petits o, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

Dans la suite du problème, on pose pour tout réel $x \geqslant 0$, $g_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t$.

14) (a) Démontrer que la fonction g_a est continue sur $[0,+\infty[$. **(2 points)**

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. La fonction g_a est bien définie sur $]0,+\infty[$ d'après la question **13)**. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$g_a(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^{1-a}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, alors d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, en particulier continue sur $]0,+\infty[$. Donc g_a est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, on remarque que $g_a(0) = \Gamma(1-a)$, donc g_a est également continue en 0. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } g_a \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

(b) Démontrer que la fonction g_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On précisera l'expression de sa dérivée.

(2 points)

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. On a démontré à la question **14)** (a) que la fonction g_a était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus, on a :

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad g_a'(x) = -\frac{e^{-x}}{x^{1-a}}.}$$

15) (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : **(2 points)**

$$0 \leqslant g_a(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}.$$

Corrigé. Soient $a \in]0,1[$ et $x > 0$.

- Par positivité de l'intégrale, on a $g_a(x) \geqslant 0$.
- Soit $A > x$. Si $t \in [x, A]$, alors $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc $\dfrac{1}{t^{1-a}} \leqslant \dfrac{1}{x^{1-a}}$, donc $\dfrac{e^{-t}}{t^{1-a}} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x^{1-a}}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^{1-a}} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^A \frac{e^{-t}}{x^{1-a}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{1-a}} \int_x^A e^{-t} \,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x} - e^{-A}}{x^{1-a}}.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$g_a(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}.$$

On a donc démontré que :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leqslant g_a(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}.}$$

(b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g_a(x)$. **(1 point)**

Corrigé. Soit $a\in]0,1[$. Comme $1-a>0$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1-a}}=0$. On en déduit que :

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1-a}}=\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x^{1-a}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\times 0=0.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g_a(x)=0.}$$

Partie 3 : La formule des compléments **(11 points)**

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E):\qquad \forall x>0,\quad y(x)-y'(x)=\frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.$$

16) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E). **(1 point)**

Corrigé. Les solutions de l'équation homogènes associée à (E) sont les fonctions $y:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de la forme :

$$\boxed{\forall x>0,\quad y(x)=\lambda\mathrm{e}^{x},\qquad \lambda\in\mathbb{R}.}$$

17) Démontrer que la fonction $h_a:\left\{\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \Gamma(1-a)\mathrm{e}^{x}g_a(x)\end{array}\right.$ est une solution particulière de (E). **(2 points)**

Corrigé. Soient $a\in]0,1[$ et $x\geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
h_a(x)-h_a'(x) &= \Gamma(1-a)\mathrm{e}^{x}g_a(x)-\Gamma(1-a)\big(\mathrm{e}^{x}g_a(x)+\mathrm{e}^{x}g_a'(x)\big)\\
&= -\Gamma(1-a)\mathrm{e}^{x}g_a'(x)\\
&= -\Gamma(1-a)\mathrm{e}^{x}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{1-a}}\right)\\
&= \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } h_a \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

18) Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que : **(2 points)**

$$\forall x>0,\quad f_a(x)=\lambda\mathrm{e}^{x}+h_a(x).$$

Corrigé. Soit $a\in]0,1[$. D'après le cours, les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme y_h+y_p où $y_h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est une solution de l'équation homogène associée à (E) et $y_p:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une solution particulière. D'après les question **16)** et **17)**, les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\lambda\mathrm{e}^{x}+h_a(x),\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Or d'après la question **12)** (a), la fonction f_a est une solution de (E), donc :

$$\boxed{\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \forall x>0,\quad f_a(x)=\lambda\mathrm{e}^{x}+h_a(x).}$$

19) Conclure que : **(2 points)**

$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = h_a(x).$$

On pourra isoler λ et considérer la limite en $+\infty$ dans l'égalité précédente.

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$:

$$f_a(x) = \lambda \mathrm{e}^x + h_a(x).$$

On obtient :

$$\lambda = (f_a(x) - h_a(x))\mathrm{e}^{-x} \qquad (\bigstar)$$

- D'une part d'après la question **12)** (c), on a $f_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
- D'autre part, d'après la question **15)** (a), on trouve :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant h_a(x) \leqslant \frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}},$$

  donc d'après le théorème d'encadrement, $h_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Par conséquent, on obtient par passage à la limite dans l'égalité $(\bigstar)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lambda = (0-0) \times 0 = 0$$

d'où :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f_a(x) = h_a(x).}$$

20) Déduire de la question précédente que : **(2 points)**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(t+1)} \mathrm{d}t = \Gamma(1-a) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \mathrm{d}t.$$

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. D'après les questions **11)** (a) et **14)** (a), les fonctions f_a et g_a (et donc h_a) sont continues en 0. On obtient donc par passage à la limite dans l'égalité de la question **19)** lorsque x tend vers 0^+ :

$$f_a(0) = h_a(0)$$

c'est-à-dire que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)} \, \mathrm{d}t = \Gamma(1-a) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \, \mathrm{d}t.}$$

21) Démontrer alors *la formule des compléments* : **(2 points)**

$$\forall a \in]0,1[, \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Corrigé. Soit $a \in]0,1[$. D'après la question **9)**, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^a(1+t)} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$. De plus, on remarque que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-a}} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \Gamma(a)$$

ce qui donne finalement *la formule des compléments* grâce à la question **20)** :

$$\boxed{\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.}$$

Partie 4 : Application au calcul de l'intégrale de Gauss (4 points)

22) Déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. **(2 points)**

Corrigé. En appliquant la question **21)** au réel $a = \frac{1}{2} \in]0,1[$, on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$$

et puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0$, alors :

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$$

23) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ est convergente et déterminer sa valeur. **(2 points)**

Corrigé. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ dans l'intégrale convergente :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $t = u^2$, donc $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$, ce qui donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u} \times 2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \text{ est convergente}}$$

et d'après la question **22)** :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Fin du corrigé