Un corrigé de l'épreuve Mathématiques II

Partie I : le cas des matrices d'ordre 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme la matrice λI_2 commute avec toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $\boxed{\mathscr{S}(\lambda I_2) = \{\lambda I_2\}}$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{K}$. On a immédiatement :

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui entraîne que $\boxed{\text{la matrice } E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. On montre de même que $F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On obtient par un calcul direct :

$$\boxed{E_k A E_k^{-1} = \begin{pmatrix} kc+a & -ck^2+(d-a)k+b \\ c & -kc+d \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{F_k A F_k^{-1} = \begin{pmatrix} -kb+a & b \\ -bk^2+(a-d)k+c & kb+d \end{pmatrix}}.$$

(c) Comme toutes les normes sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ sont équivalentes, on peut choisir de travailler avec la norme $\|\,\|_\infty$ définie par :

$$\text{si } N = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}), \text{ alors } \|N\|_\infty = \max\{|u|,|v|,|w|,|x|\}.$$

- $\boxed{\text{Supposons que la classe de similitude de } A \text{ soit bornée}}$. Il existe donc un réel M tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|E_k A E_k^{-1}\right\|_\infty \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \left\|F_k A F_k^{-1}\right\|_\infty \leqslant M.$$

  On a donc en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|kc+a| \leqslant M, \qquad \left|-ck^2+(d-a)k+b\right| \leqslant M \qquad \text{et} \qquad |kb+d| \leqslant M.$$

  Si c était non nul, on aurait $|kc+a| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$! Donc $\boxed{c=0}$.
  Si d était différent de a, on aurait $\left|-ck^2+(d-a)k+b\right| = |(d-a)k+b| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$! Donc $\boxed{d=a}$.
  On prouve de même que $\boxed{b=0}$.
  Finalement, $\boxed{A \text{ est une matrice scalaire}}$.

- Réciproquement, $\boxed{\text{si } A \text{ est une matrice scalaire, alors } \mathscr{S}(A) \text{ est un singleton et donc est bornée}}$.

3. (a) Comme deux matrices semblables ont le même spectre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ_i est une valeur propre de M_k et donc $\det(M_k - \lambda_i I_2) = 0$. L'application $\det : \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue car le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale de ses coefficients. On obtient donc en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\det(B-\lambda_i I_2)=0}.$$

(b) Les deux matrices A et B sont de taille 2 et admettent chacune λ_1 et λ_2 comme valeurs propres distinctes. Par condition suffisante, elles sont diagonalisables et semblables à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Par symétrie et transitivité de la relation de similitude, $\boxed{B \in \mathscr{S}(A)}$.

On a démontré que toute suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ a sa limite dans $\mathscr{S}(A)$: $\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ est donc bien fermée}}$.

4. (a) • Le polynôme caractéristique de A est unitaire, de degré 2, et sa seule racine dans $\mathbb{K}$ est λ. Par conséquent, $\chi_A(X)=(X-\lambda)^2$. $\boxed{\text{Comme } \chi_A(X) \text{ est scindé, } A \text{ est trigonalisable}}$.

• Introduisons l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1,e_2) est A. Il existe une base (b_1,b_2) de $\mathbb{K}^2$ et un scalaire α_0 tel que

$$\mathrm{Mat}_{(b_1,b_2)}(u)=\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si α_0 était nul, u serait l'homothétie $\lambda\mathrm{Id}$ et donc A serait une matrice scalaire! Donc $\alpha_0 \neq 0$.

• Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. En posant $b_1' = \frac{\alpha_0}{\alpha} b_1$ et $b_2' = b_2$, $\left(b_1', b_2'\right)$ est encore une base de $\mathbb{K}^2$ car $\alpha_0 \neq 0$. De plus :

$$\begin{cases} u\left(b_1'\right) = \frac{\alpha_0}{\alpha} u(b_1) = \frac{\alpha_0}{\alpha}\lambda b_1 = \lambda b_1' \\ u\left(b_2'\right) = u(b_2) = \alpha_0 b_1 + \lambda b_2 = \alpha b_1' + \lambda b_2' \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Mat}_{(b_1',b_2')}(u)=\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } T=\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ sont semblables}}$, car elles sont associées au même endomorphisme u de $\mathbb{K}^2$.

(b) D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$. Or cette suite converge vers λI_2 qui n'appartient pas à $\mathscr{S}(A)$ (car A n'est pas une matrice scalaire). $\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ n'est donc pas fermée}}$.

5. Supposons $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Montrons que $\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ est fermée si, et seulement si, } A \text{ est diagonalisable}}$.

- Supposons A diagonalisable. Si A a deux valeurs propres distinctes, la question 3 montre que $\mathscr{S}(A)$ est fermée. Sinon, A est une matrice scalaire, et $\mathscr{S}(A)$ est un singleton et donc une partie fermée.
- Si A n'est pas diagonalisable, alors A a une seule valeur propre et n'est pas une matrice scalaire. La question 4 montre que $\mathscr{S}(A)$ n'est pas fermée.

6. (a) Le spectre réel de A est vide si, et seulement si, son polynôme caractéristique

$$\chi_A(X)=X^2-\mathrm{tr}(A)\,X+\det(A)$$

n'a pas de racine réelle, ce qui revient à dire que son discriminant $\Delta=(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)$ est strictement négatif. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\varnothing \Leftrightarrow 4\det(A)-(\mathrm{tr}(A))^2>0}.$$

(b) Comme le spectre de u est vide, e_1 n'est pas un vecteur propre de u. Par conséquent, la famille $(e_1, u(e_1))$ est libre, et donc est une base de $\mathbb{R}^2$, car $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$. La matrice de u dans cette base est de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,u(e_1))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}.$$

Comme deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant, nécessairement

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{(e_1,u(e_1))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}}.$$

(c) Par continuité de la trace et du déterminant, B a la même trace et le même déterminant que A. Par conséquent, $4\det(B) - (\operatorname{tr}(B))^2 = 4\det(A) - (\operatorname{tr}(A))^2 > 0$, et donc B, tout comme A, a un spectre réel vide et est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$.

On a démontré que toute suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ a sa limite dans $\mathscr{S}(A)$: $\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ est donc bien fermée}}$.

7. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. D'après les questions 3,4 et 6 :

$\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ est fermée si, et seulement si, } A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ ou n'a aucune valeur propre réelle.}}$

Partie II : matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

1. Pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{K}^n$, comme la famille $(x, u(x))$ est liée, il existe un unique scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Soit $i \in [\![2, n]\!]$. On a en particulier :

$$u(e_1) = \lambda_{e_1} e_1,\ u(e_i) = \lambda_{e_i} e_i \text{ et } u(e_1 + e_i) = \lambda_{e_1+e_i}(e_1 + e_i).$$

Mais $u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_{e_1} e_1 + \lambda_{e_i} e_i$.

Par unicité des coordonnées dans une base, on obtient : $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_i} = \lambda_{e_1+e_i}$.

Puisque l'égalité $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_i}$ est valable pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $\operatorname{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u) = \lambda_{e_1} I_n$, ce qui montre que $\boxed{u \text{ est une homothétie}}$.

2.
   - Comme A n'est pas une matrice scalaire, u n'est pas une homothétie. La question précédente assure alors qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre.
   - Par théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base de $\mathbb{K}^n$, notée $(x, u(x), b_3, \dots, b_n)$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. $(\alpha x, u(x), b_3, \dots, b_n)$ est encore une base de $\mathbb{K}^n$, et

$$\boxed{\text{la matrice de } u \text{ dans cette base a pour première colonne } \begin{pmatrix} 0\,, & \alpha\,, & 0\,, & \dots\,, & 0 \end{pmatrix}^T}.$$

3. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On travaille avec la norme $\| \|_\infty$ associée à la base canonique. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A est une matrice scalaire, alors la classe de similitude de A est le singleton $\{A\}$ et donc est bornée.
- Supposons que A n'est pas une matrice scalaire. La question précédente montre que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\mathscr{S}(A)$ contient une matrice de norme supérieure ou égale à $|\alpha|$: $\mathscr{S}(A)$ n'est donc pas bornée.

$$\boxed{\mathscr{S}(A) \text{ est bornée si, et seulement si, } A \text{ est une matrice scalaire}}.$$

4. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude. Comme $n \geqslant 2$, il exite une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas une matrice scalaire (par exemple $A = E_{1,2}$). Alors :

$$\forall M \in \mathscr{S}(A), \|M\| = \|A\|$$

ce qui entraîne que $\mathscr{S}(A)$ est bornée !

$\boxed{\text{Par conséquent, il n'existe pas de norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ invariante par similitude}}$.

Partie III : matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée

1. (a) • Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$\chi_M(X) \quad = \det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (XI_n - M)_{\sigma(i),i}$$

Par conséquent, les coefficients de $\chi_M(X)$ sont des fonctions polynomiales de ceux de M.

• Ainsi, $\boxed{\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ M & \mapsto & \chi_M(X) \end{array}\right. \text{ est continue}}$ car ses fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ le sont.

(b) • $\boxed{\text{Soit } P \text{ un polynôme annulateur de } A}$.

▷ Soit M une matrice semblable à A : il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $M = QAQ^{-1}$.
Par récurrence évidente, on a $M^k = QA^kQ^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis par combinaison linéaire, on obtient $P(M) = QP(A)Q^{-1} = 0$.

▷ En particulier, on a $P(M_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or, l'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & P(M) \end{array}\right.$ est continue, car ses fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ le sont (les coefficients de $P(M)$ sont des fonctions polynomiales de ceux de M). Par passage à la limite, on obtient $\boxed{P(B) = 0}$.

• Comme A est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule A. Vu que P annule aussi B, on en déduit que $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$.

(c) D'après la question (a), A et B ont le même polynôme caractéristique : ces deux matrices ont donc les mêmes valeurs propres, <u>avec les mêmes ordres de multiplicité</u>.

De plus, d'après la question (b), A et B sont toutes les deux diagonalisables. Elles sont par conséquent semblables à la même matrice diagonale, et donc semblables.

$\boxed{\text{On a démontré que } B \in \mathscr{S}(A), \text{ ce qui montre que } \mathscr{S}(A) \text{ est fermé}}$.

2. (a) • En notant $\mathscr{B}$ la base $(b_1, b_2 \dots, b_n)$, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}\left(b_1, \frac{b_2}{k} \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k^i} \neq 0.$$

$\boxed{\mathscr{B}_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k} \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right) \text{ est donc une base de } \mathbb{C}^n}$.

• Déterminons la matrice T_k de u dans la base $\mathscr{B}_k$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} u\left(\frac{b_j}{k^{j-1}}\right) &= \frac{1}{k^{j-1}} u(b_j) \\ &= \frac{1}{k^{j-1}} \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} b_i \quad . \\ &= \sum_{i=1}^{j} \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \frac{b_i}{k^{i-1}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (T_k)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{t_{i,j}}{k^{j-i}} \text{ si } i \leqslant j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

ou autrement dit :

$$\boxed{T_k = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_k}(u) = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \frac{t_{1,2}}{k} & \frac{t_{1,3}}{k^2} & \cdots & \frac{t_{1,n}}{k^{n-1}} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t_{n-2,n}}{k^2} \\ & (0) & & \ddots & \frac{t_{n-1,n}}{k} \\ & & & & t_{n,n} \end{pmatrix}}$$

(b) $(T_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite de matrices de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers la matrice diagonale $\mathrm{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$. Comme $\mathscr{S}(A)$ est fermée, $\boxed{A \text{ est semblable à cette matrice diagonale, et est par conséquent diagonalisable}}$.

Partie IV : une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

1. • Par linéarité de la trace,

$\boxed{\mathscr{T} \text{ est un sous-espace affine de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ de direction le sous-espace vectoriel constitué des matrices de trace nulle}}$.

• Introduisons à nouveau la norme $\| \|_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une matrice M dans l'intérieur de $\mathscr{T}$. Il existe donc $R \in \mathbb{R}_*^+$ tel que la boule ouverte de centre M et de rayon R est incluse dans $\mathscr{T}$. Or, la matrice $M + \frac{r}{2} I_n$ appartient à cette boule ouverte, et sa trace vaut $\mathrm{tr}(M) + \frac{nr}{2} = \mathrm{tr}(A) + \frac{nr}{2} \neq \mathrm{tr}(A)$!

$\boxed{\text{L'intérieur de } \mathscr{T} \text{ est donc vide}}$.

2. Comme deux matrices semblables ont même trace, $\mathscr{S}(A)$ est inclus dans $\mathscr{T}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{l'intérieur de } \mathscr{S}(A) \text{ est inclus dans l'intérieur de } \mathscr{T}, \text{ et donc est vide}}$.