Exercice 1 - 13pts

Q1. **[1pt]** f est bornée sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda^n f(x+na)| \leq \|f\|_\infty |\lambda|^n$.
Comme $|\lambda| < 1$, on en déduit que $\sum \lambda^n f(x+na)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Q2. (a) **[1pt]** La majoration de **Q1.** prouve la convergence normale, donc uniforme, de $\sum \lambda^n f(x+na)$ sur $\mathbb{R}$.
Comme $x \to \lambda^n f(x+na)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) **[1pt]** De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \lambda^n f(x+na) = \ell \lambda^n$.

Le théorème de double limite nous donne : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell \lambda^n = \frac{\ell}{1-\lambda}$ car $|\lambda| < 1$.

Q3. **[1pt]** La fonction nulle est dans $\mathcal{L}$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{L}$. On note K_f et K_g des réels tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq K_f|x-y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq K_g|x-y|$. On a alors $|(\alpha.f + g)(x) - (\alpha.f+g)(y)| \leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ donc $\alpha.f + g \in \mathcal{L}$.

Q4. **[1pt]** En prenant $y = 0$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(0)| \leq K_f|x|$ donc $|f(x)| \leq K_f|x| + |f(0)|$.

Q5. **[1pt]** On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda^n f(x+na)| = |\lambda|^n |f(x+na)| \leq |\lambda|^n (A|x+na| + B)$.
Comme $|\lambda| < 1$ on en déduit par croissances comparées que $|\lambda^n f(x+na)| \underset{n \to +\infty}{=} o(1/n^2)$ et donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

Q6. (a) **[2pts]** $\displaystyle |F(x) - F(y)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n |f(x+na) - f(y+na)| \leq K_f|x-y| \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n = \frac{K_f}{1-|\lambda|}|x-y|$ donc $F \in \mathcal{L}$.

$\displaystyle F(x) - \lambda.F(x+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x+na+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$.
Donc $F(x) - \lambda.F(x+a) = f(x)$.

(b) **[2pts]** On a alors $F(x) - \lambda.F(x+a) = G(x) - \lambda.G(x+a)$ donc $F(x) - G(x) = \lambda.\big(F(x+a) - G(x+a)\big)$.
C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc en itérant on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $F(x) - G(x) = \lambda^n.\big(F(x+na) - G(x+na)\big)$.
Avec **Q4.** qui peut être utilisée avec F et G on a :
$|F(x) - G(x)| \leq |\lambda|^n.\big(|F(x+na)| + |G(x+na)|\big) \leq |\lambda|^n.\big(A_F|x+na| + B_F + A_G|x+na| + B_G\big)$.
Les croissances comparées donnent donc lorsque $n \to +\infty$: $|F(x) - G(x)| \leq 0$ et donc $F(x) = G(x)$.

Q7. **[1pt]** Il est évident que $f \in \mathcal{L}$. On a : $\displaystyle F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$.

Q8. **[2pts]** cos est 1-lipschitzienne d'après l'inégalité des acroissements finis.

On a : $\displaystyle F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x+na) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{e}^{i(x+na)}\right)$.

Or : $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{e}^{i(x+na)} = \mathrm{e}^{ix} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lambda \mathrm{e}^{ia}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1 - \lambda \mathrm{e}^{ia}} = \frac{\mathrm{e}^{ix}(1 - \lambda \mathrm{e}^{-ia})}{|1 - \lambda \mathrm{e}^{ia}|^2} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \lambda \mathrm{e}^{i(x-a)})}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos(a)}$.

Donc : $\displaystyle F(x) = \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos(a)}$.

Exercice 2 - 25pts

Q9. **[1pt]** La famille $(\{X = n\})_{n\in\mathbb{N}} \cup (\{X = +\infty\})$ est un sce donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$.

Q10. **[1pt]** On note X la variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X = n$ lorsqu'on obtient le premier « pile » au lancer de rang n, et $X = +\infty$ lorsqu'on n'obtient jamais « pile ».

Alors on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$ donc $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Q11. **[2pts]** La probabilité d'obtenir PPF sur un groupe de 3 lancers est égale à 1/8.
Comme les groupes de 3 lancers sont disjoints leurs résultats sont indépendants.
On sait donc que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/8)$ et donc $\mathbb{P}(Y = n) = \left(\frac{7}{8}\right)^n \frac{1}{8}$.
On a alors $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \frac{1}{8} = 0$.

Q12. **[4pts]** Comme $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$, la formule des probabilités totales donne : $\mathbb{P}(A_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap \{Z = j\})$.

⋆ Comme $\{Z = k\} \subseteq A_k$ on a $\mathbb{P}(A_k \cap \{Z = k\}) = \mathbb{P}(Z = k)$ (vrai au moins si $k \geq 2$).
⋆ On a $A_k \subseteq \{Z \leq k\}$ donc si $j > k$ on a $\mathbb{P}(A_k \cap \{Z = j\}) = 0$ (vrai au moins si $k \geq 2$).
⋆ $A_k \cap \{Z = k-1\} = \{Z = k-1\} \cap P_k$ et comme ces deux derniers sont indépendants :
$\mathbb{P}(A_k \cap \{Z = k-1\}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1)$ (vrai au moins si $k \geq 3$).
⋆ Si $j \leq k-2$, $A_k \cap \{Z = j\} = \{Z = j\} \cap P_{k-1} \cap P_k$ et comme ces trois derniers sont indépendants :
$\mathbb{P}(A_k \cap \{Z = j\}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z = j)$ (vrai au moins si $k \geq 4$).

On a donc pour $k \geq 4$:
$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k-2} \mathbb{P}(Z = j) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z \leq k-2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z = k-1) + \mathbb{P}(Z = k)$$

Q13. **[1pt]** $\mathbb{P}(A_k) = 1/4$ et la formule est valide si $k = 3$ ou 2. Comme $\mathbb{P}(Z \leq k-2) = 1 - \mathbb{P}(Z \geq k-1)$ on a la formule demandée.

Q14. **[3pts]** En sommant pour k allant de 2 à $+\infty$ on a que Z est d'espérance finie égale à 6.

Q15. **[3pts]** On sait que $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1)$ et on utilise **Q13**. pour obtenir la formule demandée.
On prend ensuite $t \in [-1, 1]$, on mutiplie par t^{k+2} des deux côtés puis on somme pour k allant de 2 à $+\infty$.
On obtient : $G(t) - \frac{t^3}{8} - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4}G(t) + \frac{t^3}{8}\left(G(t) - \frac{t^2}{4}\right)$ d'où $G(t) = \frac{t^2}{4 - 2t - t^2}$.

Q16. **[1pt]** T représente le rang du lancer où la partie se termine par la victoire d'un des deux joueurs.

Q17. **[4pts]** La famille $(P_{n-1} \cap P_n, F_{n-1} \cap P_n, F_n)$ est un sce avec lequel on utilise la formule des probabilités totales.
⋆ $\{T \geq n+1\} \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3} = \{X_A = n+3\}$
⋆ $\{T \geq n+1\} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3} = \{X_B = n+1\} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}$
⋆ $\{T \geq n+1\} \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3} = \{X_B = n+2\} \cap F_{n+3}$
On obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{T \geq n+1\} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}) &= \mathbb{P}(X_A = n+3) + \mathbb{P}(\{X_B = n+1\} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{X_B = n+2\} \cap F_{n+3})\end{aligned}$$

De plus $\{X_B = n+1\}$, P_{n+2}, F_{n+3} sont indépendants, $\{X_B = n+2\}$ et F_{n+3} le sont aussi et c'est aussi le cas de $\{T \geq n+1\}$, P_{n+1}, P_{n+2}, F_{n+3}. On obtient alors la formule souhaitée.

Q18. **[2pts]** On choisit le même sce et on remarque que :
⋆ $\{T \geq n+1\} \cap P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3} = \{X_A = n+1\} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}$

$\star$ $\{T \geq n+1\} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3} = P_n \cap \{X_B = n+3\}$
$\star$ $\{T \geq n+1\} \cap F_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3} = F_n \cap \{X_B = n+3\}$
Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{T \geq n+1\} \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}) &= \mathbb{P}(\{X_A = n+1\} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}) + \mathbb{P}(P_n \cap \{X_B = n+3\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(F_n \cap \{X_B = n+3\})\end{aligned}$$

ce qui donne $\frac{1}{8}\mathbb{P}(T \geq n+1) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_A = n+1) + \mathbb{P}(X_B = n+3)$.

Q19. [3pts] En égalisant les deux expressions on trouve que pour $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X_A = n+3) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_B = n+2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_B = n+1) = \mathbb{P}(X_B = n+3) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_A = n+1)$$

On vérifie que cette formule est valable pour $n = 0$ et $n = 1$ puis on somme pour n allant de 0 à $+\infty$. Comme $\{X_A < +\infty\}$ (resp. $\{X_B < +\infty\}$) est l'union disjointe des $\{X_A = n\}$ (resp. $\{X_B = n\}$) on obtient par σ-additivité :
$\pi_A + \frac{1}{2}\pi_B + \frac{1}{4}\pi_B = \pi_B + \frac{1}{4}\pi_A$ soit $3\pi_A = \pi_B$.
De plus si on note E l'évènement « on obtient au moins une fois la séquence $PPFFPP$ » alors d'après l'énoncé $\mathbb{P}(E) = 1$ et comme $E \subseteq \{T < +\infty\}$ on a $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Mais $\{T < +\infty\}$ est l'union disjointe de $\{X_A < +\infty\}$ et $\{X_B < +\infty\}$ donc $\pi_A + \pi_B = 1$.
Ainsi $\pi_A = \frac{1}{4}$ et $\pi_B = \frac{3}{4}$; le jeu n'est pas équitable.

Exercice 3 - 12pts

Q20. [2pts] $\chi_A = X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
On trouve $E_{-2}(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$, $E_0(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right]$ et $E_2(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right]$.
Donc si $D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\0 & 2 & 4\\-1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ alors $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $A = PDP^{-1}$.

Q21. [2pts] Comme χ_A est scindé à racines simples on sait que A est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
Soit $X \neq 0_{n,1}$ une colonne propre de A et λ la valeur propre associée : $AX = \lambda X$.
Alors $AMX = MAX = \lambda MX$ donc $MX \in E_\lambda(A)$ qui est une droite vectorielle. Comme $X \neq 0_{n,1}$ il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \mu X$ et donc X est une colonne propre pour M.

Q22. [3pts] On note u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A (resp. M).
Comme u est diagonalisable il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{K}^n$ propre pour u.
D'après la question précédente c'est aussi une base propre pour v donc v est diagonalisable dans la même base que u.
Si on note P la matrice de passage de la base canonique à cette base de diagonalisation alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}MP$ sont diagonales.

Q23. [3pts] On reprend les notations de **Q20.**.
Si $M^2 = A$ alors $AM = MA = M^3$ donc $N = P^{-1}MP$ est diagonale. Comme $N^2 = D$ on a $N = \begin{pmatrix}\pm i\sqrt{2} & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & \pm\sqrt{2}\end{pmatrix}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et N n'existe pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Comme $M \longmapsto P^{-1}MP$ est bijective on en déduit qu'il y a 4 valeurs possibles de la matrice M si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Réciproquement les 4 matrices M vérifient bien $M^2 = A$ donc si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ il existe 4 racines carrées de A. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il n'en existe aucune.

Q24. **[2pts]** D'après le cours B est orthodiagonalisable et ses valeurs propres sont positives.
On note λ_1, ..., λ_n ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité, $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PDP^T$.
Alors si on pose $M = P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$ on a $M^2 = B$. De plus il est évident que M est symétrique, et elle est positive car toutes ses valeurs propres le sont.