EPITA IPSA ESME

CONCOURS
**CPGE**
EPITA - IPSA - ESME

**1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS**
**POUR VOUS PRÉPARER**
**À UNE MULTITUDE**
**DE MÉTIERS**

Samedi 8 avril 2023

# <u>OPTION : PHYSIQUE</u>

*MP - MPI - PC - PSI - PT - TSI*

## Durée : 2 heures

---

## Conditions particulières

Calculatrice interdite
Documents interdits

# Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
# Option Physique
# Parc d'attraction

- Calculatrices interdites.
- Les différentes parties sont indépendantes.
  Les sous-parties le sont également en grande partie.
- On donne : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$, $\qquad 10^{-1{,}25} \simeq 0{,}056 \qquad (80/3{,}6)^2 \simeq 5 \times 10^2$
  $(80 \times 3{,}6)^2 \simeq 8 \times 10^4$

## I Toboggan aquatique

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

### I.1 Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée $h$, et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note $g$ l'intensité de la pesanteur et $m$ la masse du passager. On note $v_B$ la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

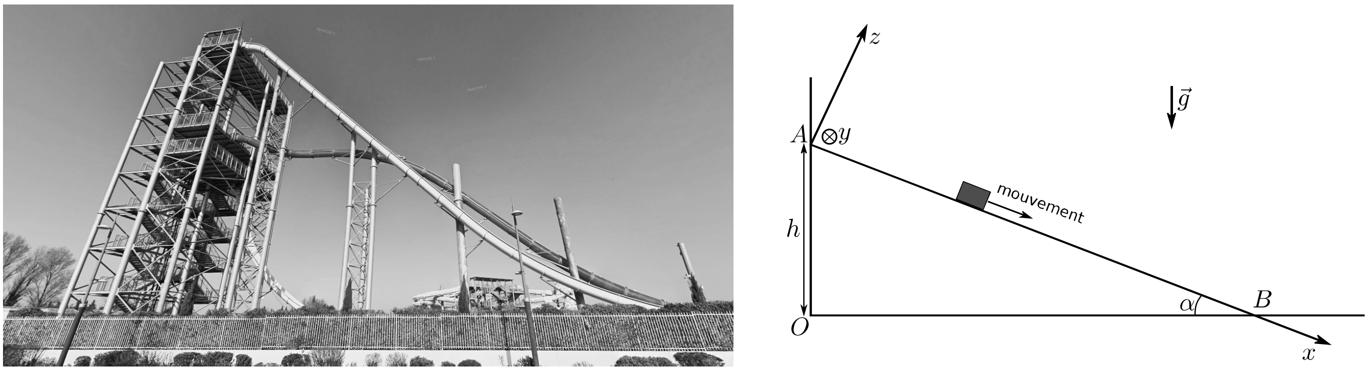


Figure 1. Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33\,\text{m}$ et $\alpha \simeq 45°$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

**1 -** En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point $B$ par le passager, en fonction de $h$ et de $g$.

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92\,\text{km/h}$.

**2 -** Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à $h$ constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec $\mu$ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

**3 -** À l'aide du principe fondamental de la dynamique (aussi appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de $N$ en fonction de $m$, $g$, et de l'angle $\alpha$.

**4 -** Exprimer le travail de la force $\vec{R}$, pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur $AB$ et de $T$. Dans un second temps, l'exprimer en fonction de $\mu$, $h$, $m$, $g$ et de l'angle $\alpha$.

**5 -** À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de $\mu$, $h$, $g$ et de l'angle $\alpha$.

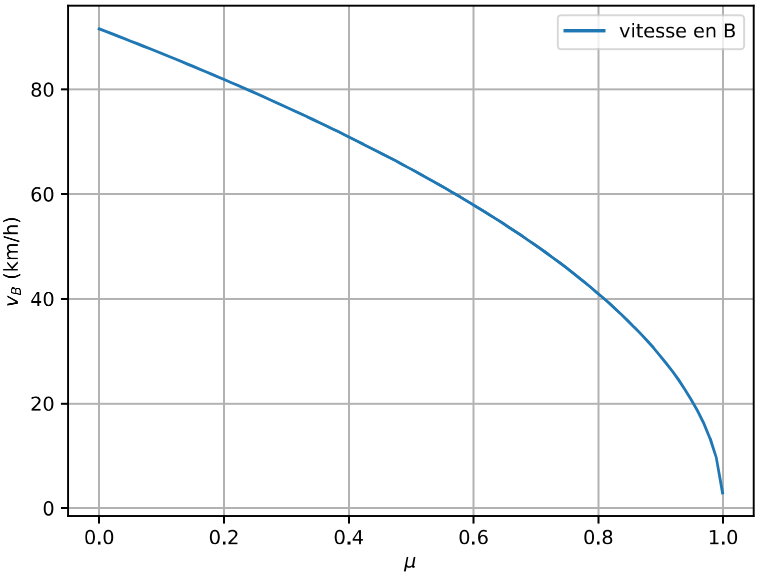


Figure 2 : tracé de l'expression de $v_B$ obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement $\mu$, pour $\alpha = 45°$.

**6 -** La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de $v_B$ en fonction de $\mu$. La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de $80\,\mathrm{km/h}$. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

**7 -** À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur $L$ de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

## I.2 Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

### I.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse $m$ (point $M$) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon $a$. Le mouvement a lieu dans le plan $Oxy$ de la figure 3. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et $g$ sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

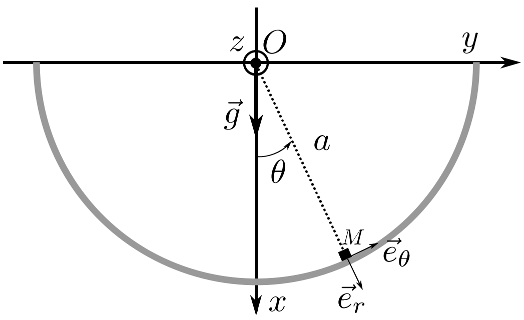


Figure 3 : le point $M$ glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon $Oz$.

**8 -** Donner l'expression du moment cinétique $\sigma_{Oz}$ de la masse $m$ selon l'axe $Oz$, en fonction de $m$, $a$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

**9 -** Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe $Oz$, en fonction de $m$, $g$, $a$ et $\theta$.

**10 -** En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.

**11 -** Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.

Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

**12 -** Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

**13 -** Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de $a$ et de $g$.

### I.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse $v_0$ à l'entrée d'un virage de rayon $R_0$. Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par $\theta$ la position angulaire du passager dans un plan $Oxy$ représenté figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan $Oxy$, qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse $v_0$ qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

– Il est possible de mener l'étude dans le plan $Oxy$ uniquement (figure 4, droite).

– Le référentiel dans lequel le plan $Oxy$ est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \dfrac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y$.

– Dans le référentiel du plan $Oxy$, alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids $\vec{P}$, à $\vec{F}$, et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan (on néglige tout frottement).

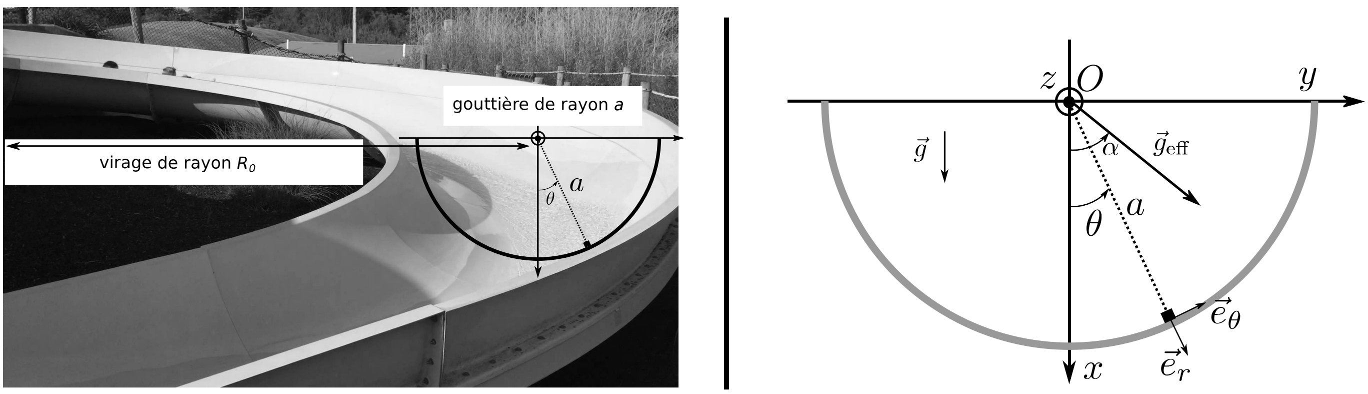


Figure 4. Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

**14 -** Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de $g$, $R_0$ et $v_0$.

**15 -** Donner également l'expression de l'angle $\alpha$ entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe $Ox$, en fonction de $g$, $R_0$ et $v_0$.

Par exemple, si $v_0 = 25\,\text{km/h}$ et $R_0 = 4\,\text{m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15{,}5\,\text{m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.