CONCOURS

CPGE

EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 8 avril 2023

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP- MPI - PC - PSI - PT - TSI

Durée : 2 heures

Conditions particulières

Calculatrice autorisée
Documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2023

Option Mathématiques

Pour tout nombre entier $N \geq 2$, on désigne par $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre N et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et par I_N la matrice-identité d'ordre N. La topologie de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.
L'objet de ce problème est l'étude, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, de la convergence et de la limite éventuelle de la suite géométrique matricielle $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ associant à tout entier naturel k la matrice M^k.

■ PARTIE I : Exemples de suites géométriques matricielles

1°) *Cas où la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante pour $k \geq 1$*

a) Etant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, établir que la suite géométrique matricielle $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante pour $k \geq 1$ si et seulement si M est une matrice de projection.

b) En déduire que toute matrice de projection M est limite d'une suite géométrique matricielle.

2°) *Etude de la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est orthogonale*

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *orthogonale* appartenant à $O_N(\mathbb{R})$.

a) Montrer que le groupe orthogonal $O_N(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) On suppose que la suite matricielle $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L.

Montrer que L est inversible et, en considérant la suite $\left(M^{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, que $M\,L = L\,M = L$.

En déduire les matrices M et L.

c) Quelles sont les suites géométriques matricielles $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes lorsque $M \in O_N(\mathbb{R})$?

3°) *Etude de la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est antisymétrique*

On note $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ les sous-espaces des matrices antisymétriques et symétriques de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
Dans cette question, on suppose que M est une matrice *antisymétrique* appartenant à $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) Etudier, selon la parité de l'entier naturel k, l'appartenance de M^k à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

c) On suppose que la suite matricielle $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L. Déterminer L.

4°) *Etude de la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque la matrice M est symétrique*

Dans cette question, on suppose que M est une matrice *symétrique* appartenant à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.

a) Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ et de réels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ tels que :

$$P^{-1}\,M\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

b) En déduire à quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur les valeurs propres de M la suite matricielle $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente (et on notera alors L sa limite).

Préciser dans ce cas sa limite L sous la forme PDP^{-1} en explicitant D à l'aide de l'entier r égal à l'ordre de multiplicité de 1 si 1 est valeur propre de M, et à 0 si 1 n'est pas valeur propre de M. Indiquer enfin la nature géométrique de L.

5°) *Etude de la suite* $\left((\lambda I_N + U)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *lorsque la matrice* U *est nilpotente et* $|\lambda| < 1$.

Dans cette question, on suppose que U est une matrice *nilpotente* appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont on note p l'indice de nilpotence (donc $U^{p-1} \neq 0$ et $U^p = 0$) et λ un complexe tel que $|\lambda| < 1$.

a) Montrer, si $\|\,.\,\|$ désigne une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, qu'on a :

$$\forall\, k \geq p, \quad \left\|(\lambda I_N + U)^k\right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \left\|U^i\right\|.$$

b) En déduire la limite de la suite matricielle $\left((\lambda I_N + U)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

■ PARTIE II : Convergence et limite d'une suite géométrique matricielle

6°) *Recherche de la limite éventuelle d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Dans toute cette question, on suppose que M est une matrice *quelconque* appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, et que *la suite* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers une matrice* $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

a) Examiner la limite de la suite $\left(M^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $L^2 = L$. Qu'en conclut-on?

b) On considère un vecteur $y \in \operatorname{Ker}(M - I_N) \cap \operatorname{Im}(M - I_N)$.

- Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{K}^N$ tels que $y = Mx - x$ et montrer qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$k\, y = M^k x - x.$$
- En déduire, si $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est muni d'une norme $|||\,.\,|||$ subordonnée à une norme $\|\,.\,\|$ de $\mathbb{K}^N$, que :
$$k \, \|y\| \leq \left|\left|\left|M^k\right|\right|\right| \, \|x\| + \|x\|.$$
- En déduire que $y = 0$, puis que : $\operatorname{Ker}(M - I_N) \cap \operatorname{Im}(M - I_N) = \{0\}$.
- Etablir enfin l'égalité suivante :
$$\mathbb{K}^N = \operatorname{Ker}(M - I_N) \oplus \operatorname{Im}(M - I_N).$$

c) Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^N$, justifier l'existence de vecteurs $x_1 \in \operatorname{Ker}(M - I_N)$ et $x_2 \in \mathbb{K}^N$ tels que $x = x_1 + Mx_2 - x_2$, puis montrer qu'on a pour tout entier naturel k :
$$M^k x = x_1 + M^{k+1} x_2 - M^k x_2.$$
En déduire qu'on a $Lx = Px$ où P est la matrice de la projection sur le sous-espace $\operatorname{Ker}(M - I_n)$ dans la direction du sous-espace $\operatorname{Im}(M - I_n)$.
Qu'en déduit-on sur la limite L? Que dire de plus si 1 n'est pas valeur propre de M ?

7°) *Conditions nécessaires de convergence d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Dans toute cette question, on suppose que M est une matrice *quelconque* appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, et que *la suite* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers une matrice* $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

a) Soit λ une valeur propre de la matrice M et $x \in \mathbb{C}^N$ un vecteur propre associé.
Etablir, pour tout entier naturel k, qu'on a : $M^k x = \lambda^k x$, et en déduire que la suite $\left(\lambda^k\right)$ converge.
En déduire quelles sont les valeurs possibles des valeurs propres de la matrice M.

b) On suppose que 1 est valeur propre de M et on désigne par r son ordre de multiplicité (où $r \geq 1$).

- On considère un vecteur x appartenant à $\operatorname{Ker}(M - I_N)^2$.
Montrer que $y = Mx - x$ appartient à $\operatorname{Ker}(M - I_N) \cap \operatorname{Im}(M - I_N)$, et que $y = 0$.
En déduire que $\operatorname{Ker}(M - I_N) = \operatorname{Ker}(M - I_N)^2$, puis que $\operatorname{Ker}(M - I_N) = \operatorname{Ker}(M - I_N)^k$ pour $k \geq 1$.

- En déduire l'égalité des sous-espaces propre et caractéristique de M associés à la valeur propre 1, autrement dit l'égalité $\mathrm{Ker}(M - I_N) = \mathrm{Ker}(M - I_N)^r$, puis l'égalité $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_N)) = r$.

8°) *Conditions suffisantes de convergence d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$

a) On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie et on note f un endomorphisme de E dont λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité r.
- Montrer que le sous-espace caractéristique $F = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^r$ est stable par f.
- On note alors $\tilde{f}$ et $\tilde{\mathrm{Id}}_E$ les endomorphismes induits par f et Id_E sur $F = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^r$.
  Montrer que $\tilde{f} - \lambda\,\tilde{\mathrm{Id}}_E$ est nilpotent, de sorte qu'on a $\tilde{f} = \lambda\,\tilde{\mathrm{Id}}_E + u$ où $u \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent.

b) Dans cette question b), on note M une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et de multiplicité $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sont de module strictement inférieur à 1.
Son polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_M(X) = \det(X\,I_N - M) = (X - \lambda_1)^{r_1}\,(X - \lambda_2)^{r_2}\ \ldots\ (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

- Justifier l'égalité : $\mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}(M - \lambda_1\,I_N)^{r_1} \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2\,I_N)^{r_2} \oplus \ \ldots\ \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p\,I_N)^{r_p}$.
- Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1}\,M\,P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1\,I_{r_1} + N_1 & O & \cdots & O \\ \hline O & \lambda_2\,I_{r_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \hline O & \cdots & O & \lambda_p\,I_{r_p} + N_p \end{array}\right)$$

où $I_{r_1}, I_{r_2}, \ldots, I_{r_p}$ sont les matrices identités de tailles respectives $r_1, r_2, \ldots, r_p$,
et $N_1, N_2, \ldots, N_p$ sont des matrices nilpotentes de tailles respectives $r_1, r_2, \ldots, r_p$.
- En déduire dans ce cas la limite de la suite géométrique $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

c) Dans cette question c), on note M une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont :
- $\lambda_1 = 1$, de multiplicité r_1, et on suppose de plus qu'on a l'égalité : $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_N)) = r_1$.
- $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$, de multiplicité $r_2, \ldots, r_p$, toutes de module strictement inférieur à 1.

Son polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_M(X) = \det(X\,I_N - M) = (X - 1)^{r_1}\,(X - \lambda_2)^{r_2}\ \ldots\ (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

- Justifier l'égalité : $\mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}(M - I_N) \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2\,I_N)^{r_2} \oplus \ \ldots\ \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p\,I_N)^{r_p}$.
- En raisonnant comme ci-dessus, préciser dans ce cas la limite de la suite géométrique $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

d) On reprend les hypothèses et les notations de la question c) ci-dessus.
- Montrer l'inclusion : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_k\,I_N)^{r_k} \subset \mathrm{Im}(M - I_N)$ pour $2 \le k \le p$.
  On pourra, si $x \in \mathrm{Ker}(M - \lambda_k\,I_N)^{r_k}$, considérer l'égalité : $(M - I_N + (1 - \lambda_k)\,I_N)^{r_k}\,x = 0$.
- En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2\,I_N)^{r_2} \oplus \ \ldots\ \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p\,I_N)^{r_p} = \mathrm{Im}(M - I_N)$.
- A l'aide des résultats précédents de la question 8, retrouver alors le résultat de la question 6.c).

e) A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ la suite géométrique matricielle $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente, et que peut-on dire de sa limite?