CONCOURS
CPGE
EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS POUR VOUS PRÉPARER À UNE MULTITUDE DE MÉTIERS

Samedi 8 avril 2023

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

PT - TSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2023

Épreuve de Mathématiques PT – TSI

On note $[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.
On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ ceux de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par cd(P) son coefficient dominant et par deg(P) son degré.

Problème – Polynômes de Tchebychev

1 Première partie – Quelques propriétés

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

1. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$. En déduire celles de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i$.
3. En déduire les solutions complexes de l'équation $T_4(z) = -\dfrac{17}{8}$.
4. Montrer simultanément et par une récurrence double que $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ et $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. Montrer que la fonction polynomiale associée à T_n a même parité que n.

On s'intéresse pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, aux polynômes P vérifiant la relation $(\star_n)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^\star,\ T_n\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à vérifier la relation $(\star_n)$.
9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire une expression de $\cos(4\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$. On pourra dériver la relation $(\star_n)$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
12. En déduire l'ensemble des racines de T_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

2 Seconde partie – Famille orthogonale

On considère l'application $< . , . >$ définie par : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ < P\, , \, Q > = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t$.

13. Montrer que $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut π.
14. Montrer que l'application $< . , . >$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.
15. Montrer que $< . , . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On muni $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< . , . >$.
On note $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire et définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_2 = \sqrt{< P\,,\, P >}$.

16. Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.
    Justifier que les intégrales I_n existent puis montrer que $I_1 = I_3 = 0$ et que $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
    On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos u$. On admettra par la suite que $I_4 = \dfrac{3\pi}{8}$.
17. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.
18. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et déterminer la norme de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
    On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.

3 Troisième partie – Courbes paramétrées

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal et on considère les courbes paramétrées (Γ_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_n(t) = T_n(t) \\ y_n(t) = T_{n+1}(t) \end{cases}$.

19. Montrer que (Γ_n) passe par le point $(1,1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
20. Montrer que les courbes (Γ_n) admettent un axe de symétrie que l'on précisera selon la parité de $n \in \mathbb{N}$.
21. Étudier les variations de x_3 et y_3 sur $\mathbb{R}^+$.
22. Donner l'allure de la courbe (Γ_3). On rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

4 Quatrième partie – Limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

On considère la série $R = \displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ et la suite de ses sommes partielles définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

23. Justifier que R converge vers une limite ℓ.
24. Déterminer des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\},\ \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.
25. En déduire que $\ell \leqslant 2$.

On considère à présent la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

26. Exprimer R_{2n} en fonction de R_n et S_n.
    En déduire que (S_n) converge vers une limite ℓ' puis exprimer ℓ' en fonction de ℓ.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère à présent $x_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ les n racines de T_n avec $k \in [\![1;n]\!]$.

27. Montrer que T_n peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
    En déduire que $\dfrac{T_n'}{T_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$.
28. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$.
29. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$.
30. Montrer que $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
31. En déduire un encadrement de S_n puis les valeurs des limites ℓ et ℓ'.

Fin du sujet