



Samedi 8 avril 2023

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP - MPI - PC - PSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2023

Épreuve de Mathématiques MP – MPI – PC – PSI

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathcal{C}^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ;
- $\mathcal{C}^{n,pm}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n par morceaux sur I et à valeurs dans \mathbb{R} ;
- $\mathcal{C}_{2\pi}^n$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} , 2π -périodiques et à valeurs dans \mathbb{R} ;
- $\mathcal{C}_{2\pi}^{n,pm}$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n par morceaux sur \mathbb{R} , 2π -périodiques et à valeurs dans \mathbb{R} ;
- pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{n,pm}$, on définit sa **régularisée** \tilde{f} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$;
- on pourra dire qu'une fonction est **normalisée** lorsqu'elle sera confondue avec sa régularisée ;
- l'ensemble des fonctions normalisées de $\mathcal{C}_{2\pi}^{n,pm}$ sera noté $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{n,pm}$.

1 Projection sur l'espace des polynômes trigonométriques

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ pour f et g dans $\mathcal{C}^{0,pm}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est-il un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$? Justifier votre réponse.
3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$.

On muni $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par : $\forall f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}, \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions de $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ suivantes : $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$.

On pose $F_n = \text{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ est orthogonale.
5. Déterminer la norme de c_n pour $n \in \mathbb{N}$ puis celle de s_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire une base orthonormée de F_n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de $p_n(f)$, la projection orthogonale de f sur F_n .

2 Coefficients et série de Fourier

Soit f de $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, on définit $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ les **coefficients de Fourier** de f par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{cases}$$

On définit également $S(f)$ la **série de Fourier** de f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx))$$

et $S_n(f)$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, montrer que :

- si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$;
- si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$.

8. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et x un réel strictement positif. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$.

Que peut-on en déduire concernant $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$?

3 Intégrale de Dirichlet

On définit les intégrales suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.

9. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

10. Montrer que $t \mapsto \frac{t - \sin t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et préciser le prolongement.

11. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - J_n)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

12. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge puis que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

4 Théorème de Dirichlet

On fixe dans cette partie $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{1,pm}$.

13. Soit u un réel qui n'est pas un multiple de 2π . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.

14. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-u)\right)}{2 \sin\left(\frac{x-u}{2}\right)} f(u) du$.

15. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(u+x) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du$.

16. Conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(u+x) + f(x-u)) du$.

17. On considère la fonction h définie par :

$$\forall u \in]0, \pi], h(u) = \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \left(\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - \tilde{f}(x) \right)$$

Montrer que h est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi]$.

On pourra noter $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ et $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$.

On admet, pour la question 18 uniquement, le **lemme de Riemann-Lebesgue** :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{0,pm}([a, b]), \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$$

18. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) du$ puis que $S(f)(x) = \tilde{f}(x)$.

5 Étude d'une fonction auxiliaire

On définit à présent $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$, $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt$ et $H : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$.

19. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} et paire.
20. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{2}{x}G(x)$.
21. Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(x) = F(x) - H(x)$.
22. Montrer que H est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $H'(x) = -G(x)$.
23. En déduire que F est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F''(x) = F(x)$.
24. Montrer que F est bornée sur \mathbb{R} et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

6 Un développement en série de Fourier

Soient $a > 0$ et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2}$.

25. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) + f_{-n}(x))$ et $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (f'_n(x) + f'_{-n}(x))$ convergent normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.
26. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et $f \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$.
27. Montrer que f est paire, 2π -périodique et dans $\mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$.
28. Déterminer $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2nat)}{1+t^2} dt$.
29. En déduire une expression simple de $a_n(f)$ puis le développement en série de Fourier de f .
30. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(f)(x) = \tilde{f}(x)$ et en déduire que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)}\pi$.

Fin du sujet