

Concours EPITA – IPSA-ESME
Epreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur
Système anti-franchissement de ligne

Document Corrigé

Durée : 2 heures

L'utilisation de calculatrices est interdite. La consultation de documents est interdite.

Le sujet comporte 8 pages (La dernière page est à rendre avec la copie).

Notations

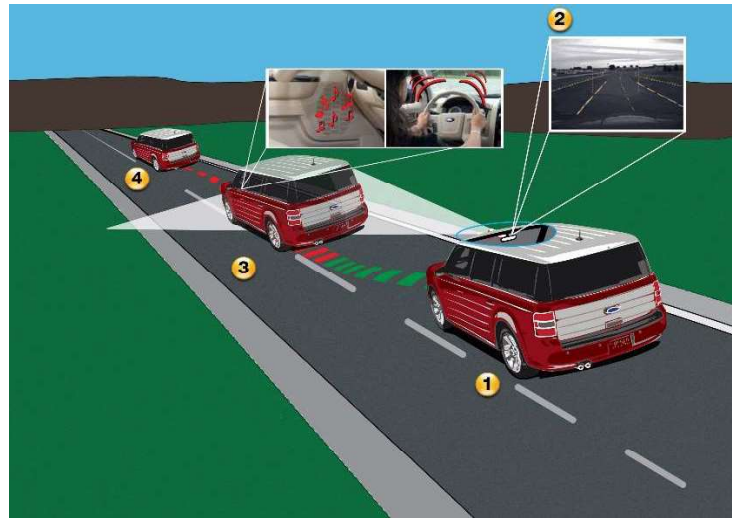
On notera :

- Le torseur cinématique du solide i par rapport au solide j : $V_{i/j} = \{\vec{\Omega}_{i/j} | \vec{V}_{P,i/j}\}_P$ où $\vec{\Omega}_{i/j}$ représente le vecteur taux de rotation du solide i par rapport au solide j et $\vec{V}_{P,i/j}$ le vecteur vitesse du point P dans le mouvement du solide i par rapport au solide j .
- Le torseur de l'action mécanique du solide i sur le solide j : $T_{i \rightarrow j} = \{\vec{R}_{i \rightarrow j} | \vec{M}_{P,i \rightarrow j}\}_P$ où $\vec{R}_{i \rightarrow j}$ représente la résultante de l'action mécanique du solide i sur le solide j et $\vec{M}_{P,i \rightarrow j}$ le moment en P de l'action mécanique du solide i sur le solide j .

Présentation

L'aide à la conduite automobile a été marquée de nombreux progrès ces dernières années. On pourra citer la direction assistée, le système ABS, l'ESP, l'allumage automatiques de feux, la géolocalisation du véhicule et le guidage routier, le régulateur de vitesse, le régulateur de vitesse adaptatif, l'assistance au freinage d'urgence, la reconnaissance des panneaux de signalisation, ... Tous ces dispositifs ont pour but de faciliter la conduite en la rendant moins fatigante et plus agréable, mais surtout en la rendant plus sûre.

On s'intéresse dans ce sujet au système anti-franchissement de ligne. Ce système permet de remettre le véhicule dans la voie de circulation en cas de franchissement de ligne. Ce système comporte une caméra fixée au pare choc avant ou sur le pare-brise et qui filme la route. Un calculateur analyse les images fournies à la caméra et en déduit la position de la voiture par rapport à la ligne. En cas de franchissement de ligne, un signal sonore est émis dans l'habitacle et une action sur la direction est donnée pour ramener le véhicule dans sa voie de circulation.



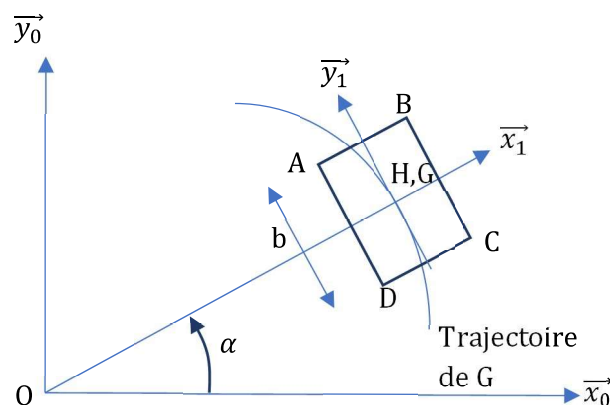
Partie 1 : conditions de non basculement et de non glissement

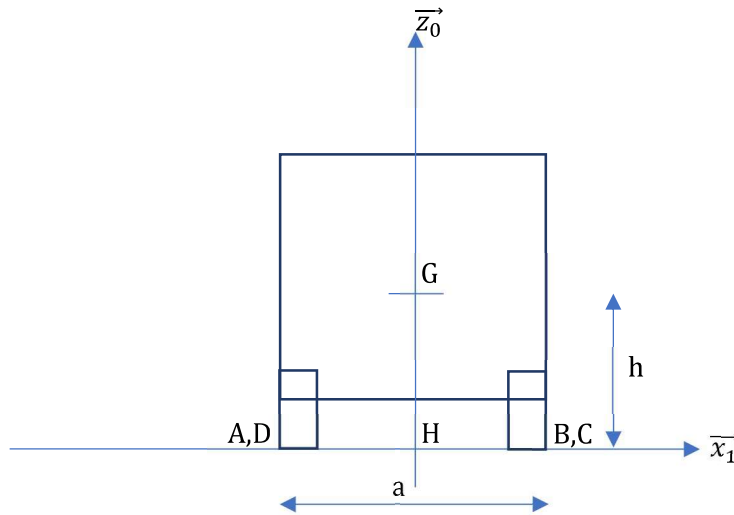
L'action du dispositif sur la direction doit être bornée. En effet, pour des raisons de sécurité, il n'est pas concevable que cette action sur la direction provoque un glissement ou un basculement du véhicule.

On considère dans cette partie que le véhicule (noté S) est en virage par rapport à la Terre (notée 0). On note le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à la Terre dont on supposera le référentiel associé comme galiléen. Le centre de gravité du véhicule est noté G. Le mouvement du véhicule S par rapport à la Terre 0 est une rotation d'axe (O, \vec{z}_0) . Le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié au véhicule. La trajectoire de G par rapport à 0 est un cercle de rayon R.

On approxime le contact des roues du véhicule avec le sol comme des contacts ponctuels en A, B, C et D. On note $\vec{AB} = \vec{DC} = a \cdot \vec{x}_1$, $\vec{DA} = \vec{CB} = b \cdot \vec{y}_1$, $\vec{HG} = h \cdot \vec{z}_0$, $\vec{OH} = R \cdot \vec{x}_1$, $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$. La masse de la voiture S est notée m, la matrice d'inertie de la voiture en G est notée $I_{S,G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$. On considérera que $\dot{\alpha}$ est constant.

L'action du sol sur la voiture est décomposée en 4 actions mécaniques s'appliquant en A (respectivement B, C et D) notée $T_{0 \rightarrow S}^A = \{T_A \cdot \vec{x}_1 + N_A \cdot \vec{z}_0 | \vec{0}\}_A$ (respectivement $T_{0 \rightarrow S}^B = \{T_B \cdot \vec{x}_1 + N_B \cdot \vec{z}_0 | \vec{0}\}_B$, $T_{0 \rightarrow S}^C = \{T_C \cdot \vec{x}_1 + N_C \cdot \vec{z}_0 | \vec{0}\}_C$ et $T_{0 \rightarrow S}^D = \{T_D \cdot \vec{x}_1 + N_D \cdot \vec{z}_0 | \vec{0}\}_D$). Le coefficient de frottement entre les roues et la route est de $f = 0,8$.





- Déterminer $V_{S/0}$ le torseur cinématique de la voiture S par rapport à la terre 0 en fonction de α , de ses dérivées et des constantes du problème. On évaluera la vitesse de ce torseur en G.

$$V_{S/0} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \\ R \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_G$$

- Déterminer $\overline{\sigma}_{G,S/0}$ le moment cinétique en G de la voiture par rapport au sol.

$$\overline{\sigma}_{G,S/0} = C \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$$

- Déterminer $\overline{a}_{G,S/0}$ le vecteur accélération de G de la voiture S par rapport à la terre en fonction de α , de ses dérivées et des constantes du problème.

$$\overline{a}_{G,S/0} = -R \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{x}_1$$

- Déterminer $\overline{\delta}_{G,S/0}$ le moment dynamique en G de la voiture S par rapport à la terre 0 en fonction de α , de ses dérivées et des constantes du problème.

$$\overline{\delta}_{G,S/0} = \vec{0}$$

- Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la voiture par rapport au sol et donner les équations reliant l'angle α , ses dérivées, les constantes du problème et les réactions du sol sur la voiture.

En ramenant les moments en G, on obtient :

$$\begin{cases} T_A + T_B + T_C + T_D = -m \cdot R \cdot \dot{\alpha}^2 & \frac{a}{2}(N_A + N_B) - \frac{a}{2}(N_C + N_D) = 0 \\ N_A + N_B + N_C + N_D - m \cdot g = 0 & \frac{b}{2}(N_A + N_D) - \frac{b}{2}(N_B + N_C) - \frac{h}{2}(T_A + T_B + T_C + T_D) = 0 \end{cases}$$

- Déterminer les quantités $N_A + N_D$ et $N_B + N_C$ du sol sur la voiture.

$$N_A + N_D = \frac{m \cdot g}{2} - \frac{h}{2 \cdot b} \cdot m \cdot R \cdot \dot{\alpha}^2 \text{ et } N_B + N_C = \frac{m \cdot g}{2} + \frac{h}{2 \cdot b} \cdot m \cdot R \cdot \dot{\alpha}^2$$

La souplesse de la suspension d'une voiture impose que $N_A = N_D$ et $N_B = N_C$.

- Vérifier que cette condition est bien vérifiée dans les équations de la question 5 et déterminer N_A , N_B , N_C et N_D .

$$N_A = N_D = \frac{m \cdot g}{4} - \frac{h}{4 \cdot b} \cdot m \cdot R \cdot \dot{\alpha}^2 \text{ et } N_B = N_C = \frac{m \cdot g}{4} + \frac{h}{4 \cdot b} \cdot m \cdot R \cdot \dot{\alpha}^2$$

- Déterminer la condition de non basculement. En déduire $\dot{\alpha}_b$ la vitesse de rotation maximale évitant le basculement du véhicule.

Les conditions de non basculement sont $N_A > 0$ et $N_D > 0$. On en déduit $\dot{\alpha}_b < \sqrt{\frac{h \cdot g}{b \cdot R}}$.

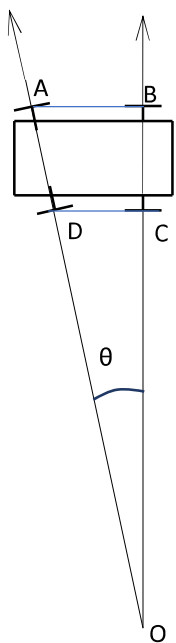
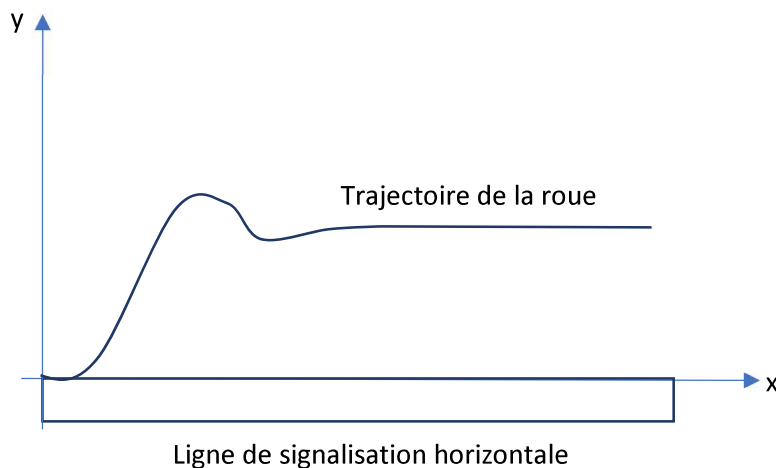
- Déterminer la condition d'adhérence du véhicule sur le sol. En déduire $\dot{\alpha}_g$ la vitesse de rotation maximale évitant le glissement du véhicule.

A la limite du glissement, on a $|T_A| < f \cdot |N_A|$, $|T_B| < f \cdot |N_B|$, $|T_C| < f \cdot |N_C|$ et $|T_D| < f \cdot |N_D|$.

On en déduit $\dot{\alpha}_g < \sqrt{\frac{g}{R}}$.

Partie 2 : Stabilité et correction de l'asservissement du système

La partie précédente a permis d'établir des bornes sur l'angle de braquage des roues évitant le basculement et le glissement du véhicule. On cherche maintenant à asservir la position du véhicule par rapport à la ligne de signalisation horizontale. La camera mesure en permanence la distance noté y entre le véhicule et la ligne de signalisation. La direction agit sur l'angle de braquage des roues noté θ . Lorsque les roues touchent une ligne de signalisation horizontale, le système demande à la direction d'agir de manière à ce que la distance entre le véhicule et la ligne soit une distance de consigne y_c . La composante de vitesse suivant x est constante.

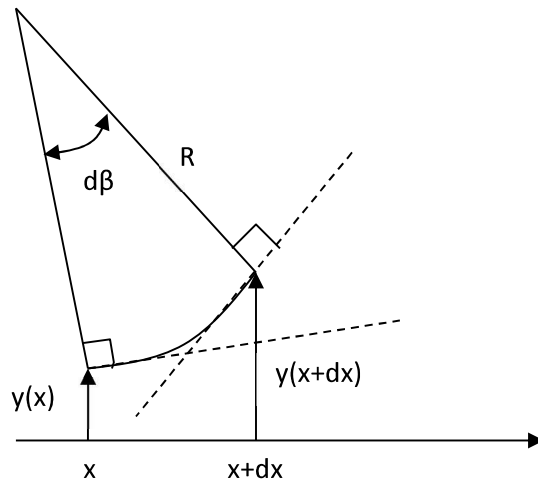


On considère que l'angle de braquage des roues avant du véhicule est lié au rayon de courbure du véhicule comme ci-contre. On néglige la largeur de la voiture devant le rayon de courbure R , c'est-à-dire $OC = OB = R$ et $OD = OA$. On considère que l'angle de braquage θ des deux roues avant est le même. L'écart entre les essieux est noté $AB = b$.

10. Déterminer la relation entre R , θ et b .

$$\tan\theta = \frac{b}{R}$$

On considère que le véhicule est en virage de rayon de courbure R . On cherche une relation entre R et la distance à la ligne de circulation y . La figure suivante présente la trajectoire entre deux instants t et $t+dt$, durant lesquels le véhicule a avancé entre les positions x et $x+dx$. Pendant cet instant, le véhicule a fait un virage d'angle infinitésimal $d\beta$.



11. Déterminer l'équation liant y à R .

$$y'' = \frac{1}{R}$$

12. En combinant avec la relation de la question 10, et en considérant l'angle θ petit, donner une relation entre y et θ . Exprimer cette relation dans le domaine de Laplace.

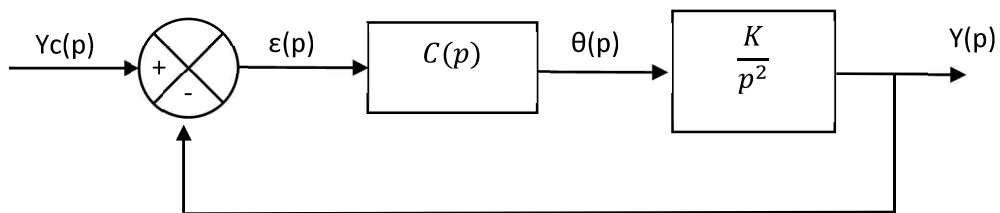
$$y'' = \frac{\theta}{b}$$

L'asservissement de la distance entre la ligne et le véhicule doit respecter le cahier des charges suivant :

Stabilité	Marge de phase de 45° .
Précision	Ecart statique indiciel nul en boucle fermée.
Rapidité	Temps de réponse du système en boucle fermée à 5% égal à 0,3 s.

Un comparateur compare la distance de consigne $y_c(t)$ et la distance mesurée $y(t)$ pour donner un écart $\varepsilon(t)$. Cet écart est corrigé et amplifié pour donner une commande aux roues $\theta(t)$.

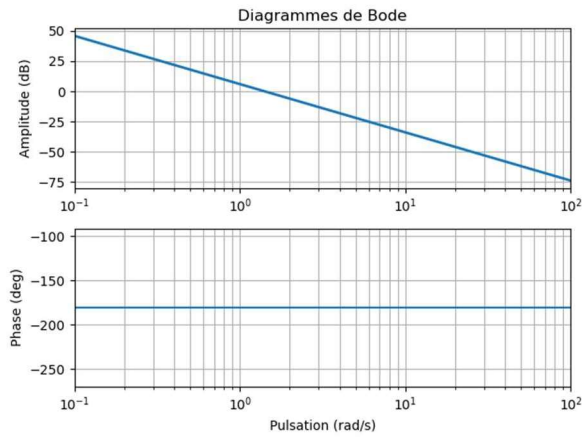
Le système asservi est modélisable par le schéma-bloc suivant :



13. Déterminer si le système non corrigé (avec $C(p) = 1$) vérifie le cahier des charges. Justifier.

Avec $C(p)=1$, la FTBF comporte des pôles imaginaires purs, le système est donc instable.

14. Déterminer la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte du système non corrigé (avec $C(p) = 1$) notée FTBO(p). Tracer le diagramme de Bode sur votre copie.

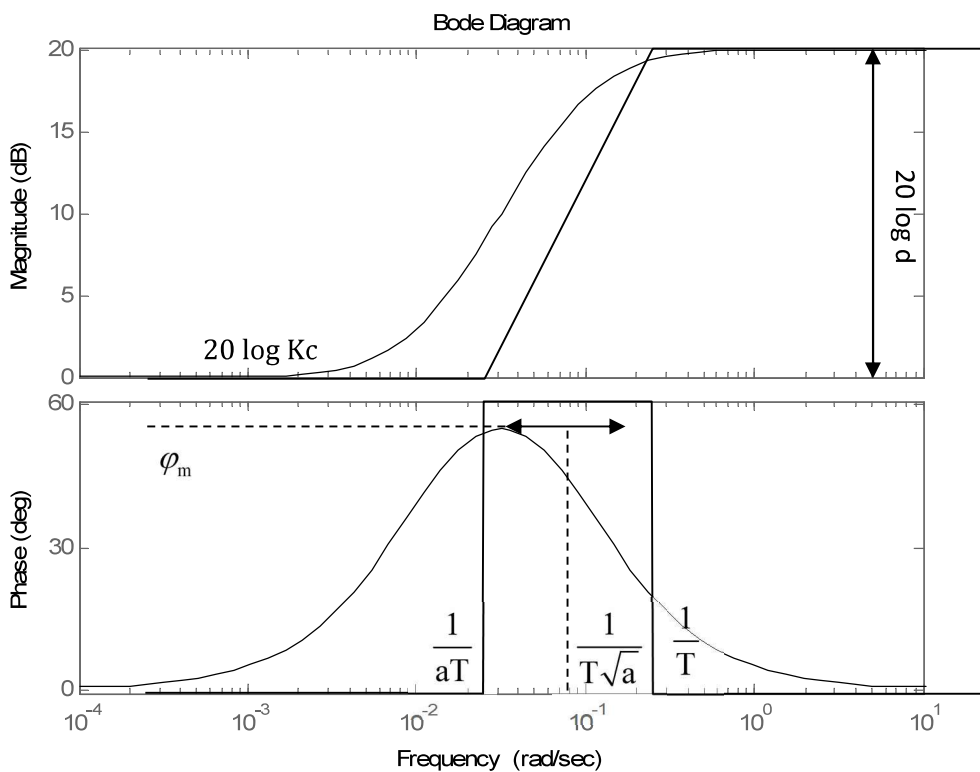


15. En faisant l'analogie avec un système du 1^{er} ordre, déterminer ω_{0dB} la pulsation à 0dB de la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé.

Si le système global est du 1^{er} ordre, de fonction de transfert $\frac{A}{1+\tau \cdot p}$, le temps de réponse à 5% vaut 3τ . Ici il faudrait $\tau = 0,1 \text{ s}$, ce qui donne $\omega_{0d} = 1/\tau = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On met en place un correcteur à avance de phase de fonction de transfert $C(p) = K_c \cdot \frac{1+d \cdot T \cdot p}{1+T \cdot p}$ où K_c , T et $d > 1$ sont des coefficients du correcteur.

16. Tracer l'allure du diagramme de Bode de $C(p)$ en fonction des paramètres.



17. Justifier l'utilisation de ce correcteur.

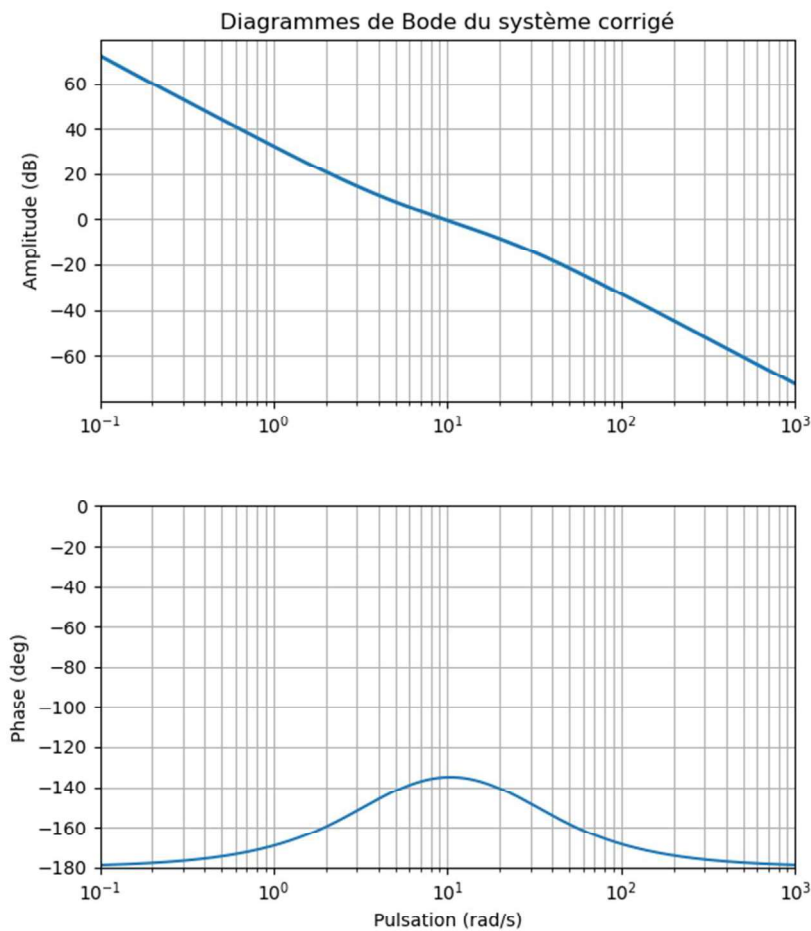
Le système est instable, la marge de phase est nulle. On veut que le système soit stable avec une marge de phase de 45° , il faut donc augmenter la phase, le correcteur a une phase toujours positive.

La phase du diagramme de Bode de la question 16 présente un maximum φ_m pour une pulsation ω_m .

18. Déterminer l'apport maximum de phase φ_m et la pulsation ω_m en fonction de d et T .

$$\varphi_m = \arcsin \frac{d-1}{d+1} \text{ et } \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}.$$

19. Déterminer φ_m en degrés pour que la marge de phase corresponde au cahier des charges. En déduire la valeur numérique de d .
 La phase de la FTBO non corrigée est -180° , on veut une marge de phase de 45° , il faut donc $\varphi_m = 45^\circ$. On en déduit $d = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 5,8$.
20. Déterminer T pour que l'apport maximum de phase du correcteur soit à ω_{0dB} du système corrigé.
 On veut $\omega_m = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $\frac{1}{T\sqrt{a}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, donc $T = \frac{1}{10\sqrt{5,8}} = 0,04 \text{ s}$
21. Déterminer K_c (sous forme d'une puissance de 10) pour vérifier la condition de la question 15.
 $20\log K_c + 10\log d + 20\log K - 40\log 10 = 0$ donc $K_c = 10^{2-\log K - \frac{1}{2}\log d}$
22. Tracer sur le Document Réponses le diagramme asymptotique ainsi que l'allure du diagramme de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte corrigée. Conclure.



FIN de l'épreuve.