Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques (Option - 2h)

1°) *Cas où la suite $k \mapsto M^k$ est constante pour $k \geq 1$*

a) Si la suite $k \mapsto M^k$ est constante pour $k \geq 1$, on a en particulier $M = M^2$ de sorte que M est alors une matrice de projection. Réciproquement, si $M = M^2$, on vérifie par récurrence immédiate que $M^k = M$ pour tout $k \geq 1$: c'est en effet vrai pour $k = 1$, et si l'on a $M^k = M$, alors $M^{k+1} = M^2$, et donc $M^{k+1} = M$. La suite $k \mapsto M^k$ est donc constante, égale à M, pour $k \geq 1$.

b) Toute matrice de projection M est donc la limite d'une suite géométrique matricielle, notamment de la suite $k \mapsto M^k$ puisqu'elle est constante, égale à M, pour $k \geq 1$.

2°) *Etude de la suite $\left(M^k\right)$ lorsque la matrice M est orthogonale*

a) On sait qu'une matrice M est orthogonale si et seulement si elle vérifie l'égalité : $M^T M = I_N$.
Pour établir que $O_N(\mathbb{R})$ est fermé, considérons une suite (M_k) de $O_N(\mathbb{R})$ convergeant vers M.
Pour tout entier naturel k, on a donc $M_k^T M_k = I_N$ et :
- l'application $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est linéaire, donc continue.
 (en effet, toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue).
- l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_N^2(\mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est bilinéaire, donc continue.
 (en effet, toute application bilinéaire sur un produit d'espaces de dimensions finies est continue).

Il résulte de ces deux arguments que : $M^T M = \lim M_k^T \lim M_k = \lim\left(M_k^T M_k\right) = I_N$.
Ainsi, $M = \lim M_k$ est orthogonale, ce qui établit que $O_N(\mathbb{R})$ est fermé.

Remarque : une autre façon d'établir ceci (avec les mêmes arguments de continuité) consiste à remarquer que $O_N(\mathbb{R})$ est fermé car c'est l'image réciproque du singleton $\{I_N\}$, qui est fermé, par l'application $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \mapsto M^T M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, qui est continue par composition des applications continues déjà indiquées.

b) On suppose que la suite matricielle $\left(M^k\right)$ converge vers une matrice L.
La matrice $L = \lim M^k$ appartient à $O_N(\mathbb{R})$ d'après les deux arguments suivants :
- $O_N(\mathbb{R})$ étant un groupe est stable par produit et contient donc les matrices M^k car $M \in O_N(\mathbb{R})$.
- $O_N(\mathbb{R})$ étant fermé contient donc la limite L de sa suite convergente $\left(M^k\right)$.

Comme $O_N(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, la matrice L est donc inversible
La suite $\left(M^{k+1}\right)$ étant une suite extraite de la suite $\left(M^k\right)$, elle converge donc aussi vers L.
Par ailleurs, on a $M^{k+1} = M\, M^k = M^k\, M$, d'où par passage à la limite $L = M\, L = L\, M$.
(en effet, on a déjà noté que l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_N^2(\mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est continue).
On a donc : $(I_N - M)\, L = L(I_N - M) = 0$, et on obtient $M = I_N$ en multipliant l'égalité par L^{-1}.
Ainsi, si la suite matricielle $\left(M^k\right)$ avec $M \in O_N(\mathbb{R})$ converge, on a $M = I_N$ et la suite $\left(M^k\right)$ n'est autre que la suite constante (I_N), de sorte que $L = I_N$ aussi.

c) La seule suite géométrique matricielle convergente $\left(M^k\right)$ où $M \in O_N(\mathbb{R})$ est la suite constante (I_N).

3°) *Etude de la suite* (M^k) *lorsque la matrice* M *est antisymétrique*

a) Les sous-espaces $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, car on sait en effet que tout sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est toujours fermé.
Un autre argument consiste à remarquer que $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{0\}$, qui est fermé, par l'application continue $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \mapsto M^T - M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Et de même, $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \mapsto M^T + M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) Comme M est antisymétrique, on a $M^T = -M$, donc pour $k \in \mathbb{N}$: $(M^k)^T = (M^T)^k = (-1)^k M^k$.
Si k est pair : $(M^k)^T = M^k$ et $M^k \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, et si k est impair : $(M^k)^T = -M^k$ et $M^k \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.

c) On suppose que la suite matricielle (M^k) converge vers une matrice L.
Comme L est limite de la suite extraite (M^{2k}), L est limite d'une suite de $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$, et comme $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est fermé, on peut affirmer que $L \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$.
Comme L est limite de la suite extraite (M^{2k+1}), L est limite d'une suite de $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$, et comme $\mathcal{A}_N(\mathbb{R})$ est fermé, on peut affirmer que $L \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.
Ainsi, la matrice-limite L appartient à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$.
On en déduit que $L = 0$ car $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_N(\mathbb{R}) = \{0\}$.
En effet, si $L \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$, on a $L^T = L$ et $L^T = -L$, d'où $L = 0$.

4°) *Etude de la suite* (M^k) *lorsque la matrice* M *est symétrique*

a) On sait que toute matrice symétrique réelle M diagonalise en base orthonormale.
Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ désignent ses valeurs propres (nécessairement réelles, distinctes ou non, et qu'il est donc possible de classer par ordre décroissant), il existe $P \in O_N(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$

Notons qu'il résulte immédiatement de cette égalité que $P^{-1} M^k P = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_N^k)$.

b) Si la suite (M^k) converge vers L, la suite $(P^{-1} M^k P)$ converge vers $P^{-1} L P$, et la suite des matrices diagonales $(\mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_N^k))$ converge donc vers $P^{-1} L P$.
Donc les suites (λ_1^k), (λ_2^k), ..., (λ_N^k) convergent et les valeurs propres de M sont dans $]-1, 1]$ puisqu'une suite géométrique réelle $k \mapsto \lambda^k$ converge si et seulement si $-1 < \lambda \leq 1$.

Inversement, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ appartiennent à l'intervalle $]-1, 1]$, deux cas se présentent :
- soit $r = 0$: les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.
  Alors la suite $(M^k) = (P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_N^k)\, P^{-1})$ converge vers la matrice nulle : $P\,0\,P^{-1} = 0$.
- soit $r \geq 1$: 1 est valeur propre d'ordre de multiplicité r, auquel cas on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 1$ et les autres valeurs propres $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_N$ sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.
  Alors la suite $(M^k) = (P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_N^k)\, P^{-1})$ converge vers la matrice : $P \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1} = L$.

Dans ces deux cas ($r = 0$ et $r \geq 1$), on a donc : $L^2 = L$, et L est une matrice de projection.

5°) *Etude de la suite* $\left((\lambda\, I_N + U)^k\right)$ *lorsque la matrice* U *est nilpotente et* $|\lambda| < 1$.

a) Si U est une matrice nilpotente appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ d'indice de nilpotence P, on a d'après la formule du binôme (puisque U et I_N commutent) :

$$\forall\, k \geq p, \quad (\lambda\, I_N + U)^k \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i}\, U^i.$$

Si $\|\,.\,\|$ désigne une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, on en déduit par inégalité triangulaire :

$$\forall\, k \geq p, \quad \left\|(\lambda\, I_N + U)^k\right\| \;\leq\; \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \left\|U^i\right\|.$$

b) Si $\lambda = 0$, on a $U^k = 0$ pour $k \geq p$ et la suite $\left((\lambda\, I_N + U)^k\right) = \left(U^k\right)$ converge bien vers 0.
Si $0 < |\lambda| < 1$, la somme précédente est une somme finie de p termes, dont chacun d'eux tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ puisqu'on a pour $0 \leq i \leq p - 1$:

$$\binom{k}{i} |\lambda|^{k-i} \left\|U^i\right\| \;=\; k(k-1)\ldots(k-i+1)\, |\lambda|^{k-i}\, \frac{\left\|U^i\right\|}{i!} \;\leq\; k^i\, e^{k\ln(|\lambda|}\, \frac{\lambda^{-i}\left\|U^i\right\|}{i!}.$$

Or, comme $\ln(|\lambda|) < 0$, la suite réelle $k \;\mapsto\; k^i\, e^{k\ln(|\lambda|}$ converge vers 0 (croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles).
Ainsi, la norme $\left\|(\lambda\, I_N + U)^k\right\|$ tend vers 0 car elle est majorée par une somme finie de p termes tendant vers 0, et la suite matricielle $\left((\lambda\, I_N + U)^k\right)$ converge vers la matrice nulle.

6°) *Recherche de la limite éventuelle d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)$

a) Si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, la suite $\left(M^{2\,k}\right)$ converge aussi vers L car c'est une suite extraite de la suite convergente $\left(M^{2\,k}\right)$. Et comme on a également $M^{2\,k} = M^k\, M^k$, la continuité du produit matriciel démontre que $\left(M^{2\,k}\right)$ converge vers L^2.
Par unicité de la limite, on a $L = L^2$ et L est donc une matrice de projection.

b) On considère un vecteur $y \in \mathrm{Ker}(M - I_N) \bigcap \mathrm{Im}(M - I_N)$.

- Il existe donc un vecteur $x \in \mathbb{K}^N$ tels que $y = Mx - x$ et comme $y \in \mathrm{Ker}(M - I_N)$, on a $M\,y = y$.
Montrons maintenant par récurrence sur k la relation $k\,y \;=\; M^k\,x - x$.
La relation est vraie pour $k = 0$ et 1.
Et si $k\,y \;=\; M^k\,x - x$, on a $k\,M\,y = M^{k+1}\,x - M\,x$ et comme $M\,y = y$ et $y = Mx - x$, il vient :
$$k\,y \;=\; M^{k+1}\,x - (y + x), \qquad \text{donc :} \quad (k+1)\,y = M^{k+1}\,x - x.$$
La relation est donc établie, et si $|||\,.\,|||$ est subordonnée à une norme $\|\,.\,\|$ de $\mathbb{K}^N$, il vient :
$$k\,\|y\| = \left\|M^k\,x - x\right\| \leq \left\|M^k\,x\right\| + \|x\| \;\leq\; \left|\left|\left|M^k\right|\right|\right|\,\|x\| + \|x\|.$$

- La suite $\left(M^k\right)$ étant convergente, donc bornée, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\left|\left|\left|M^k\right|\right|\right| \leq C$, et :
$$\|y\| \;\leq\; \frac{1}{k}\left(\left|\left|\left|M^k\right|\right|\right|\,\|x\| + \|x\|\right) \;\leq\; \frac{1}{k}\,(C+1)\,\|x\|.$$
En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que $\|y\| = 0$, et donc $y = 0$.
Ainsi donc, $\mathrm{Ker}(M - I_N) \bigcap \mathrm{Im}(M - I_N) = \{0\}$ et la somme de ces deux sous-espaces est directe.

- Il en résulte que : $\mathrm{Ker}(M - I_N) \oplus \mathrm{Im}(M - I_N) = \mathbb{K}^N$ puisque le théorème du rang donne alors :
$$\dim(\mathrm{Ker}(M - I_N) \oplus \mathrm{Im}(M - I_N)) \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(M - I_N)) + \dim(\mathrm{Im}(M - I_N)) = N.$$

c) D'après ce résultat, pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^N$, il existe deux vecteurs $x_1 \in \mathrm{Ker}(M - I_N)$ et $x_2 \in \mathbb{K}^N$ tels que $x = x_1 + Mx_2 - x_2$. Comme $Mx_1 = x_1$, on a en multipliant cette relation par M^k :

$$M^k\, x = x_1 + M^{k+1}\, x_2 - M^k\, x_2.$$

Si P est la matrice de la projection sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(M - I_N)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_N)$, alors $x_1 = Px$ de sorte qu'on a pour tout entier naturel k :

$$M^k\, x = Px + M^{k+1}\, x_2 - M^k\, x_2.$$

Et puisque M^k tend vers L lorsque k tend vers $+\infty$, $M^k\, x$ tend vers Lx lorsque k tend vers $+\infty$, par exemple parce que $\left\|M^k\, x - Lx\right\| = \left\|\left(M^k - L\right) x\right\| \leq \left|\left|\left|M^k - L\right|\right|\right| \, \|x\|$ tend bien vers 0.

Le passage à la limite dans la relation précédente donne donc :

$$Lx = Px + Lx_2 - Lx_2 = Px.$$

On a donc $Lx = Px$ pour tout vecteur x, et donc la limite $L = P$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_N)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_N)$.

Si 1 n'est pas valeur propre de M, alors $\mathrm{Ker}(M - I_N) = \{0\}$ et P est le projecteur nul : alors $L = 0$.

7°) *Conditions nécessaires de convergence d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)$

a) Si λ est valeur propre de M, il existe un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^N$ (donc non nul) vérifiant $Mx = \lambda\, x$.

Par récurrence immédiate, pour tout entier naturel k, on a : $M^k\, x = \lambda^k\, x$.

Comme M^k converge vers L, $M^k\, x$ converge vers Lx ainsi qu'on l'a justifié précédemment au 6°.

La suite $\left(\lambda^k\, x\right)$ converge vers Lx, et chacune des N composantes $\lambda^k\, x_i$ $(1 \leq i \leq N)$ du vecteur $\lambda^k\, x$ converge donc vers la composante correspondante du vecteur Lx lorsque k tend vers $+\infty$.

Comme x n'est pas nul, l'une de ses composantes au moins, x_{i_0} par exemple, est non nulle.

En notant $L = \left(l_{i\,j}\right)$, on voit qu'en particulier la suite complexe $\left(\lambda^k\, x_{i_0}\right)$ converge vers $\sum_{j=1}^N l_{i_0\, j}\, x_j$, et donc la suite complexe $\left(\lambda^k\right)$ converge vers $\frac{1}{x_{i_0}} \sum_{j=1}^N l_{i_0\, j}\, x_j$.

Or une suite géométrique complexe $\left(\lambda^k\right)$ converge si et seulement si :

- soit $|\lambda| < 1$, auquel cas sa limite est nulle,
- soit $\lambda = 1$, auquel cas elle est constante égale à 1.

Ce sont donc les seules valeurs propres possibles de M lorsque la suite $\left(M^k\right)$ est convergente.

b) On suppose que 1 est valeur propre de M et on désigne par r son ordre de multiplicité (où $r \geq 1$).

- Si un vecteur x appartient à $\mathrm{Ker}(M - I_N)^2$, alors $y = Mx - x \in \mathrm{Im}(M - I_N) \bigcap \mathrm{Ker}(M - I_N)$ car $(M - I_N)\, y = (M - I_N)^2\, x = 0$. D'après la question 6.b), on a : $\mathrm{Im}(M - I_N) \bigcap \mathrm{Ker}(M - I_N) = \{0\}$. Donc $y = Mx - x = 0$, ce qui implique que $x \in \mathrm{Ker}(M - I_N)$.

  On en déduit que $\mathrm{Ker}(M - I_N)^2 \subset \mathrm{Ker}(M - I_N)$, et comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on obtient bien l'égalité $\mathrm{Ker}(M - I_N)^2 = \mathrm{Ker}(M - I_N)$.

  Raisonnons alors par récurrence pour montrer que $\mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+1} = \mathrm{Ker}(M - I_N)^k$ pour $k \geq 1$.

  Le résultat est vrai pour $k = 1$ puisqu'on vient de l'établir.

  Supposons qu'il soit vrai au rang k et montrons que : $\mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+2} = \mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+1}$.

  On a comme d'habitude l'inclusion : $\mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+1} \subset \mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+2}$.

  Pour établir l'inclusion inverse, considérons un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+2}$.

  Alors $(M - I_N)^k\, x \in \mathrm{Ker}(M - I_N)^2$, et puisqu'on a $\mathrm{Ker}(M - I_N)^2 = \mathrm{Ker}(M - I_N)$, il en résulte que $(M - I_N)^k\, x \in \mathrm{Ker}(M - I_N)$, et donc $x \in \mathrm{Ker}(M - I_N)^{k+1}$. On a ainsi prouvé l'égalité voulue.

Comme la suite $\left(\mathrm{Ker}(M - I_N)^k\right)$ est pour $k \geq 1$ constante pour l'inclusion, on a en particulier, si r désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 : $\mathrm{Ker}(M - I_N) = \mathrm{Ker}(M - I_N)^r$.
Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est égal au sous-espace caractéristique associé à 1.
Or on sait que la dimension du sous-espace caractéristique associé à une valeur propre est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre, soit ici : $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_N)) = r$.

8°) *Conditions suffisantes de convergence d'une suite géométrique matricielle* $\left(M^k\right)$

a) On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie et on note f un endomorphisme de E dont λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité r.
Pour établir que $F = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r$ est stable par f, soit x un vecteur de $F = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r$.
On a donc $(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r\,(x) = 0$, et a fortiori $f \circ (f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r\,(x) = 0$. Et comme f et $(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r$ commutent puisque ce sont deux polynômes en f, on en déduit que : $(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r \circ f(x) = 0$.
Ainsi, on a donc : $f(x) \in F = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r$ et ce sous-espace est bien stable par f.

- Pour tout $x \in F = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r$, on a évidemment $(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)^r\,(x) = 0$.
Donc si $\tilde{f}$ et $\tilde{\mathrm{Id}}_E$ sont les endomorphismes induits par f et Id_E sur F, on a $\left(\tilde{f} - \lambda\, \tilde{\mathrm{Id}}_E\right)^r = 0$, et $u = \tilde{f} - \lambda\, \tilde{\mathrm{Id}}_E$ est nilpotent, de sorte qu'on a bien : $\tilde{f} = \lambda\, \tilde{\mathrm{Id}}_E + u$ où $u \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent.

b) Dans cette sous-question, on suppose que $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ a toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de module strictement inférieur à 1, et son polynôme caractéristique s'écrit :

$$\chi_M(X) = \det(X\, I_N - M) = (X - \lambda_1)^{r_1}\,(X - \lambda_2)^{r_2}\, \ldots\, \left(X - \lambda_p\right)^{r_p}.$$

D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $\chi_M(M) = 0$, de sorte qu'on en déduit :

$$\chi_M(M) = (M - \lambda_1\, I_N)^{r_1}\,(M - \lambda_2\, I_N)^{r_2}\, \ldots\, \left(X - \lambda_p\, I_N\right)^{r_p} = 0.$$

Si $a \neq b$, les polynômes $X - a$ et $X - b$ sont premiers entre eux, et $(X - a)^\alpha$ et $(X - b)^\beta$ aussi car si deux éléments sont premiers entre eux, leurs puissances le sont aussi.
Ici, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de M, et donc les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$ sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème des noyaux peut donc s'appliquer et donne :

$$\mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}(0) = \mathrm{Ker}(M - \lambda_1\, I_N)^{r_1} \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2\, I_N)^{r_2} \oplus\, \ldots\, \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p\, I_N\right)^{r_p}.$$

- Notons alors f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ canoniquement associé à M.
D'après a), ces p sous-espaces $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_N)^{r_i}$ sont stables par f, et la matrice de f dans une base de $\mathbb{C}^N$ obtenue par concaténation de bases des sous-espaces $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_N)^{r_i}$ est donc diagonale par blocs de dimensions respectives r_i puisque la dimension d'un sous-espace caractéristique est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
De plus, f induit sur chacun de ces p sous-espaces $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_N)^{r_i}$ des endomorphismes qui sont de la forme $\tilde{f} = \lambda\, \tilde{\mathrm{Id}} + u$ où u est nilpotent. Donc chacun des p blocs diagonaux de la matrice de f dans cette base est de la forme $\lambda_i\, I_{r_i} + N_i$ avec N_i nilpotente de taille r_i.
Finalement, si P désigne la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, on a :

$$P^{-1}\, M\, P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1\, I_{r_1} + N_1 & O & \cdots & O \\ \hline O & \lambda_2\, I_{r_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \hline O & \cdots & O & \lambda_p\, I_{r_p} + N_p \end{array}\right)$$

Et par conséquent :

$$M^k = P\left(\begin{array}{c|c|c|c} \left(\lambda_1 I_{r_1} + N_1\right)^k & O & \cdots & O \\ \hline O & \left(\lambda_2 I_{r_2} + N_2\right)^k & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \hline O & \cdots & O & \left(\lambda_p I_{r_p} + N_p\right)^k \end{array}\right)P^{-1}.$$

Comme on suppose dans cette question que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de M sont de module strictement inférieur à 1, la question 5 permet d'affirmer que tous ces blocs diagonaux ont pour limite 0 quand k tend vers $+\infty$, ce qui donne : $\lim M^k = 0$.

c) On raisonne comme précédemment en tenant compte de : $\lambda_1 = 1$ et de : $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_N)) = r_1$, ce qui implique $\mathrm{Ker}(M - I_N) = \mathrm{Ker}(M - I_N)^{r_1}$ puisque le premier de ces sous-espaces est inclus dans le second, et qu'ils ont donc même dimension. L'égalité obtenue en b) ci-dessus à l'aide du théorème de Hamilton-Cayley et du théorème des noyaux donne maintenant :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}(0) &= \mathrm{Ker}(M - I_N)^{r_1} \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p I_N\right)^{r_p} \\ &= \mathrm{Ker}(M - I_N) \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p I_N\right)^{r_p}. \end{aligned}$$

Sur $\mathrm{Ker}(M - I_N)$, l'endomorphisme induit par f, endomorphisme canoniquement associé à M, est évidemment l'identité, et sur les autres sous-espaces $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i I_N)^{r_i}$ avec $2 \leq i \leq p$, on raisonne comme on l'a déjà fait, ce qui justifie l'existence d'une matrice de passage P telle que :

$$P^{-1} M P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{r_1} & O & \cdots & O \\ \hline O & \lambda_2 I_{r_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \hline O & \cdots & O & \lambda_p I_{r_p} + N_p \end{array}\right)$$

- Et par conséquent :

$$M^k = P\left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{r_1} & O & \cdots & O \\ \hline O & \left(\lambda_2 I_{r_2} + N_2\right)^k & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & O \\ \hline O & \cdots & O & \left(\lambda_p I_{r_p} + N_p\right)^k \end{array}\right)P^{-1}.$$

Comme $|\lambda_2| < 1, \ldots, \left|\lambda_p\right| < 1$, la question 5 montre que les $p - 1$ derniers blocs diagonaux ont pour limite 0 quand k tend vers $+\infty$, ce qui donne : $\lim M^k = P\,\mathrm{Diag}\left(I_{r_1}, 0, \ldots, 0\right) P^{-1}$.

La limite n'est autre que la matrice de projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_N)$ dans la direction de la somme des sous-espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p I_N\right)^{r_p}$.

d) Montrons l'inclusion : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{r_k} \subset \mathrm{Im}(M - I_N)$ pour $2 \leq k \leq p$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_N)^{r_k}$, on a : $(M - \lambda_k I_N)^{r_k} x = (M - I_N + (1 - \lambda_k) I_N)^{r_k} x = 0$.

Comme $r_k \geq 1$, ceci implique : $(1 - \lambda_k)^{r_k} x + \sum_{j=1}^{r_k} \binom{r_k}{j} (1 - \lambda_k)^{r_k - j} (M - I_N)^j x = 0$.

Dans le $\sum$, l'indice j démarre à 1, ce qui établit que chacun des termes appartient à $\mathrm{Im}(M - I_N)$, et comme il s'agit d'un sous-espace, la somme appartient aussi à $\mathrm{Im}(M - I_N)$.

Quitte à diviser par $(1 - \lambda_k)^{r_k}$ qui n'est pas nul car $|\lambda_k| < 1$ pour $2 \leq k \leq p$, on a : $x \in \mathrm{Im}(M - I_N)$.

L'inclusion est ainsi prouvée.

- On en déduit l'inclusion $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p} \subset \mathrm{Im}(M - I_N)$.

  Par ailleurs, on a vu que : $\mathbb{C}^N = \mathrm{Ker}(M - I_N) \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p}$.

  Il en résulte avec l'aide du théorème du rang que :

  $$\dim\left(\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p}\right) = N - \dim(\mathrm{Ker}(M - I_N) = \dim(\mathrm{Im}(M - I_N)).$$

  On en déduit l'égalité : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p} = \mathrm{Im}(M - I_N)$.

  La limite n'est autre que la matrice de projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_N)$ dans la direction de la somme des sous-espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_N)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_N)^{r_p} = \mathrm{Im}(M - I_N)$, et on retrouve ainsi le résultat de 6.c).

e) Si $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, il résulte des questions 7 et 8 que la suite géométrique matricielle $\left(M^k\right)$ converge si et seulement si l'une des deux situations suivantes est réalisée :

- toutes les valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1.
  Dans ce cas, la limite de la suite $\left(M^k\right)$ est la matrice nulle.
- l'une des valeurs propres de M est égale à 1, et si r est sa multiplicité, $\dim(\mathrm{Ker}(M - I_N)) = r$, et toutes ses autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.
  Dans ce cas, la limite de la suite $\left(M^k\right)$ est la matrice de la projection sur le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(M - I_N)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_N)$ qui lui est alors supplémentaire.

Notons que ce dernier résultat reste aussi valable dans le 1er cas où 1 n'est pas valeur propre de M, puisque la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_N)$ est alors la matrice nulle.