Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2023

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques PT – TSI

On note $[\![a,b]\!] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$.
On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ ceux de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par cd(P) son coefficient dominant et par deg(P) son degré.

Problème – Polynômes de Tchebychev

1 Première partie – Quelques propriétés

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{array}\right.$$

1. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$
$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2. Déterminer les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$. En déduire celles de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i$.

Cherchons les réels x et y tels que $(x+iy)^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$:

$$\begin{array}{ll}
 & (x+iy)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i \\
\Leftrightarrow & (x^2 - y^2) + i(2xy) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}((x+iy)^2) = \mathrm{Re}(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}i) \\ \mathrm{Im}((x+iy^2)) = \mathrm{Im}(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}i) \\ |(x+iy)^2| = |x+iy|^2 = |\frac{1}{2} + \frac{3}{8}i| \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = \frac{3}{8} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = \frac{3}{8} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = \frac{9}{8} \\ xy = \frac{3}{16} \\ 2y^2 = \frac{1}{8} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{array}\right.
\end{array}$$

Les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i$ sont donc $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}i$ et $-\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$.

Par ailleurs $z^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i \Leftrightarrow \overline{z^2} = \overline{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i} \Leftrightarrow \overline{z}^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}i \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}i$ ou $\overline{z} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$ ou $z = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}i$

Les racines carrées complexes de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}i$ sont donc $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$ et $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}i$.

3. En déduire les solutions complexes de l'équation $T_4(z) = -\dfrac{17}{8}$.

$T_4(z) = -\frac{17}{8}$
$\Leftrightarrow \quad 8z^4 - 8z^2 + 1 = -\frac{17}{8}$
$\Leftrightarrow \quad 8z^4 - 8z^2 + \frac{25}{8} = 0$ posons $X = z^2$
$\Leftrightarrow \quad 8X^2 - 8X + \frac{25}{8} = 0$ de discriminant $\delta = 64 - 4.8.\frac{25}{8} = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$
$\Leftrightarrow \quad X = \frac{8-6i}{2.8} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}i$ ou $X = \frac{8+6i}{2.8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i$
$\Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}i$ ou $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i$ donc, d'après la question précédente :
$\Leftrightarrow \quad z \in \left\{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i, -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i\right\}$

4. Montrer simultanément et par une récurrence double que $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ et $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Posons alors $\mathcal{H}_n$:« $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ ».
Initialisation : $\mathcal{H}_1$ est vraie car $T_1 = X$ et $\mathcal{H}_2$ est vraie car $T_2 = 2X^2 - 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ soient vraies.
Montrons que $\mathcal{H}_{n+2}$ l'est aussi dans ce cas :
On sait que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, or par hypothèses de récurrence on sait aussi que
$\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2$ et que $\deg(T_n) = n$ donc $\deg(T_{n+2}) = n+2$.
Dès lors $\mathrm{cd}(T_{n+2}) = \mathrm{cd}(2XT_{n+1}) = 2\,\mathrm{cd}(T_{n+1})$.
Ainsi $\mathrm{cd}(T_{n+2}) = 2.2^{(n+1)-1} = 2^{n+1}$ et $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.
Conclusion : par récurrence on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$.

5. Montrer que la fonction polynomiale associée à T_n a même parité que n.

Procédons par récurrence.
Soit $\mathcal{H}_n$: « $x \mapsto T_n(x)$ a même parité que n ».
Initialisation : $T_0(x) = 1$ est une fonction paire donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
De même $T_1(x) = x$ est une fonction impaire donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ soient vraies.
Montrons que $\mathcal{H}_{n+2}$ l'est aussi dans ce cas :
On a $T_{n+2}(-x) = 2(-x)T_{n+1}(-x) - T_n(-x)$.

(a) Si n est pair alors $n+1$ est impair et d'après les hypothèses de récurrence $T_n(-x) = T_n(x)$ et $T_{n+1}(-x) = -T_n(x)$. Ainsi $T_{n+2}(-x) = 2(-x)(-T_{n+1}(x)) - T_n(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) = T_{n+2}(x)$. Dans ce cas $n+2$ est pair et $x \mapsto T_{n+2}$ est paire.

(b) Sinon n est impair, $n+1$ est donc pair et d'après les hypothèses de récurrence $T_n(-x) = -T_n(x)$ et $T_{n+1}(-x) = T_n(x)$. Ainsi $T_{n+2}(-x) = 2(-x)T_{n+1}(x) - (-T_n(x)) = -2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = -T_{n+2}(x)$. Dans ce cas $n+2$ est impair et $x \mapsto T_{n+2}$ est impaire.

Donc dans tous les cas $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.
Conclusion : par récurrence on obtient que pour tout entier naturel n, $x \mapsto T_n(x)$ a même parité que n.

On s'intéresse pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, aux polynômes P vérifiant la relation $(\star_n)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^\star,\ T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$.

Procédons par récurrence.
Soit $\mathcal{H}_n$: « $\forall z \in \mathbb{C}^\star,\ T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ ».
Initialisation : $T_0\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 1$ et $\frac{1}{2}\left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right) = 1$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
De même, $T_1\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(z^1 + \frac{1}{z^1}\right)$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ soient vraies.
Montrons que $\mathcal{H}_{n+2}$ l'est aussi dans ce cas :
On a $T_{n+2}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) - T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$
$= \left(z + \frac{1}{z}\right)T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) - T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$ or d'après les hypothèses de récurrence :

$= \left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{2}\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$
$= \frac{1}{2}\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\right]$
$= \frac{1}{2}\left[z^{n+2}+\frac{1}{z^n}+z^n+\frac{1}{z^{n+2}}-z^n-\frac{1}{z^n}\right]$
$= \frac{1}{2}\left(z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\right)$
Donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.
Conclusion : par récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^\star,\ T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

$T_n(\cos(\theta)) = T_n\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = T_n\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{i\theta}\right)^n+\frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+\frac{1}{e^{in\theta}}\right)$
Donc $T_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right) = \cos(n\theta)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à vérifier la relation $(\star_n)$.

On déduit de la question précédente que T_n vérifie la relation $(\star_n)$. Montrons qu'il y a unicité d'un tel polynôme :
Soit P et Q deux polynômes vérifiant la relation $(\star_n)$, alors : $\begin{cases} \forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \end{cases}$
Ainsi par différence $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) - Q(\cos(\theta)) = 0$ et donc $(P-Q)(\cos(\theta)) = 0$.
Le polynôme $P-Q$ est s'annule donc pour une infinité de valeurs (toutes les valeurs de $\cos(\theta)$, c'est-à-dire tous les réels de [-1,1]) ; c'est donc le polynôme nul.
Ainsi $P = Q$ et il n'y a donc qu'un seul polynôme vérifiant la relation $(\star_n)$.
T_n est donc le seul polynôme vérifiant la relation $(\star_n)$.

9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire une expression de $\cos(4\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$.

Puisque T_4 vérifie $(\star_4)$, il en résulte que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_4(\cos(\theta)) = \cos(4\theta)$
or $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$ donc $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(4\theta) = 8(\cos(\theta))^4 - 8(\cos(\theta))^2 + 1$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$. On pourra dériver la relation $(\star_n)$.

D'après $(\star_n)$,
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
Ce qui donne par dérivations successives par rapport à θ :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n'(\cos(\theta)).(-\sin(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$
et
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n''(\cos(\theta)).(-\sin(\theta))(-\sin(\theta)) + T_n'(\cos(\theta)).(-\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta)$$
soit encore puisque $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$:
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n''(\cos(\theta)).(\sin(\theta))^2 - T_n'(\cos(\theta)).(\cos(\theta)) = -n^2T_n(\cos(\theta))$$
Par ailleurs $(\sin(\theta))^2 = 1 - (\cos(\theta))^2$ donc :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n''(\cos(\theta)).(1-(\cos(\theta))^2) - T_n'(\cos(\theta)).(\cos(\theta)) + n^2T_n(\cos(\theta)) = 0$$
Ainsi :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n''(\cos(\theta)).((\cos(\theta))^2-1) + T_n'(\cos(\theta)).(\cos(\theta)) - n^2T_n(\cos(\theta)) = 0$$
Donc $T_n''(X).(X^2-1) + T_n'(X).(X) - n^2T_n(X)$ est un polynôme s'annulant pour une infinité de valeurs (pour tout réel de $[-1,1]$), c'est donc le polynôme nul et :
$$(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$

Les solutions sont donc les $\theta = \dfrac{\pi}{2n} + k.\dfrac{\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

12. En déduire l'ensemble des racines de T_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

$T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0$ donc $\cos(\theta)$ est une racine de T_n lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2n} + k.\dfrac{\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction cosinus étant 2π-périodique et paire, cela conduit à considérer plusieurs fois les mêmes valeurs de $\cos(\theta)$. On obtient en fait n racines distinctes en prenant k entre 0 et $n-1$.

Or T_n est un polynôme de degré n donc il admet au plus n racines.

Nous avons donc obtenu l'ensemble de ses n racines : $\left\{ \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k.\dfrac{\pi}{n}\right) \middle| k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

2 Seconde partie – Famille orthogonale

On considère l'application $< .\,,. >$ définie par : $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ < P\,,\,Q > = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

13. Montrer que $I_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut π.

$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_a^b = \arcsin b - \arcsin a$, ainsi :

- $\forall x \in [0,1[,\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in]-1,0],\ \displaystyle\int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\arcsin(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} \frac{\pi}{2}$

Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut π.

14. Montrer que l'application $< .\,,. >$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels.

$t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$ donc est bornée sur cet intervalle.

Ainsi $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ |P(t)Q(t)| \leqslant M$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = M\pi$ d'après la question 13.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et $< .\,,. >$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$.

15. Montrer que $< .\,,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Soient P, Q, R trois polynômes à coefficients réels et λ un réel.

- $< .\,,. >$ est une forme : $< P\,,\,Q >$ existe d'après la question 14 et $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$
- $< .\,,. >$ est symétrique : $< P\,,\,Q >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =< Q\,,\,P >$
- $< .\,,. >$ est bilinéaire : $< .\,,. >$ est symétrique et linéaire à gauche car

$$\begin{aligned} < \lambda P + Q\,,\,R > &= \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda P(t)+Q(t))R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda < P\,,\,R > + < Q\,,\,R > \end{aligned}$$

- $< .\,,. >$ est positive : $< P\,,\,P >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

— $< . , . >$ est définie-positive :

$$< P\,,\, P >= 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_{-0,9}^{0,9} \frac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$$

$\Rightarrow \forall t \in [-0,9;0,9[,\ \ \dfrac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ car $t \mapsto \dfrac{(P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est positive et continue sur $[-0,9;0,9]$

$\Rightarrow \forall t \in]-0,9;0,9[,\ \ P(t) = 0 \Rightarrow P$ admet une infinité de racines $\Rightarrow P = 0$

Ainsi $< . , . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

> On muni $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< . , . >$.
> On note $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire et définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_2 = \sqrt{< P\,,\, P >}$.

16. Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.
    Justifier que les intégrales I_n existent puis montrer que $I_1 = I_3 = 0$ et que $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
    On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos u$. On admettra par la suite que $I_4 = \dfrac{3\pi}{8}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =< 1\,,\, X^n >$ donc les trois intégrales existent d'après la question 15.

— $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$ car la fonction est impaire

— De même $I_3 = 0$

— $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{0} -(\cos u)^2\,\mathrm{d}u$ en posant $t = \cos u$ $\left(\text{d'où } \mathrm{d}u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}.\mathrm{d}t\right)$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[u + \frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

17. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.

— Soit $P_0 = 1$

— Posons $P_1 = X$ car on remarque que $< P_0\,,\, P_1 >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = I_1 = 0$

— Déterminons P_2 de la forme $X^2 - a.P_0 - b.P_1$ avec a et b réels tels que $< P_2\,,\, P_0 >= 0$ et $< P_2\,,\, P_1 >= 0$:

$$\begin{cases} < P_2\,,\, P_0 > = 0 \\ < P_2\,,\, P_1 > = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} < X^2\,,\, P_0 > -a < P_0\,,\, P_0 > -b\underbrace{< P_1\,,\, P_0 >}_{=0} = 0 \\ \\ < X^2\,,\, P_1 > -a\underbrace{< P_0\,,\, P_1 >}_{=0} -b < P_1\,,\, P_1 > = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_2 - a.I_0 = 0 \\ I_3 - b.I_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - a\pi = 0 \\ 0 - b\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{d'après les questions 13 et 16}$$

D'où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$.

On obtient alors $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{2}$

Il reste à normaliser la famille orthogonale ainsi obtenue. On a :

— $\|P_0\|_2^2 =< P_0\,,\, P_0 >= I_0 = \pi$

— $\|P_1\|_2^2 =< P_1\,,\, P_1 >= I_2 = \dfrac{\pi}{2}$

— $\|P_2\|_2^2 =< P_2\,,\, P_2 >=< X^2 - \dfrac{1}{2}\,,\, X^2 - \dfrac{1}{2} >=< X^2\,,\, X^2 > - < 1\,,\, X^2 > + \dfrac{1}{4} < 1\,,\, 1 >= I_4 - I_2 + \dfrac{I_1}{4}$

Ainsi $\|P_2\|_2^2 = \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{8}$

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt produit donc la famille orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) avec :
$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0$, $Q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}X = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1$ et $Q_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2X^2-1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_2$

18. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et déterminer la norme de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.

— Soient p et q deux entiers naturels distincts. Il vient donc $p - q \neq 0$ et $p + q \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}< T_p\,,\, T_q > &= \int_{-1}^{1} \frac{T_p(t)T_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{t=\cos u}{=} \int_0^{\pi} T_p(\cos u)T_q(\cos u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} \cos(pu)\cos(qu)\,\mathrm{d}u \text{ d'après la question 7} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\left((p+q)\,u\right) + \cos\left((p-q)\,u\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)u)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)u)}{p-q}\right]_0^{\pi} = 0\end{aligned}$$

La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

— $$\begin{aligned}< T_p\,,\, T_p > &= \int_{-1}^{1} \frac{(T_p(t))^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \underset{t=\cos u}{=} \int_0^{\pi} (T_p(\cos u))^2\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} (\cos(pu))^2\,\mathrm{d}u \text{ d'après la question 7} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(2pu) + 1\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ainsi $< T_0\,,\, T_0 >= I_0 = \pi$ et $\forall p \in \mathbb{N}^\star,\ < T_p\,,\, T_p >= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2pu)}{2p} + u\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\pi} \text{ si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ sinon} \end{cases}$.

3 Troisième partie – Courbes paramétrées

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal et on considère les courbes paramétrées (Γ_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_n(t) = T_n(t) \\ y_n(t) = T_{n+1}(t) \end{cases}$.

19. Montrer que (Γ_n) passe par le point $(1, 1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{H}_n$: « $T_n(1) = 1$ »
Montrons ce résultat par récurrence double :
Initialisation : $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ donc $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies.
Ainsi $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1) = 2 - 1 = 1$ donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.
Conclusion : par récurrence on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1$.
Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n(1) = y_n(1) = 1$ et $(1, 1) \in (\Gamma_n)$.

20. Montrer que les courbes (Γ_n) admettent un axe de symétrie que l'on précisera selon la parité de $n \in \mathbb{N}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ x_n(-t) = T_n(-t) = (-1)^n T_n(t)$ d'après la question 5
De même $\forall t \in \mathbb{R},\ y_n(-t) = T_{n+1}(-t) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(t)$
Ainsi :

— si n est pair $\forall t \in \mathbb{R},\ x_n(-t) = x_n(t)$ et $y_n(-t) = -y_n(t)$ donc (Γ_n) admet une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

— si n est impair $\forall t \in \mathbb{R},\ x_n(-t) = -x_n(t)$ et $y_n(-t) = y_n(t)$ donc (Γ_n) admet une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

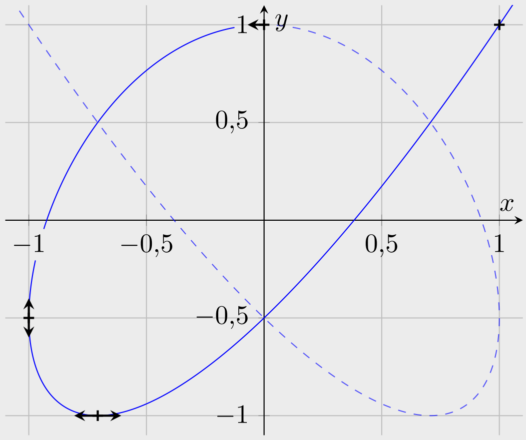
21. Étudier les variations de x_3 et y_3 sur $\mathbb{R}^+$.

x_3 et y_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ en tant que fonctions polynomiales.
— $\forall t \in \mathbb{R},\ x_3'(t) = 12t^2 - 3 = 3(4t^2 - 1) = 3(2t - 1)(2t + 1)$
— $\forall t \in \mathbb{R},\ y_3'(t) = 32t^3 - 16t = 16t(2t^2 - 1) = 16t(\sqrt{2}t - 1)(\sqrt{2}t + 1)$

On en déduit le tableau des variations suivant :

t	0		$1/2$		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$x_3'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x_3(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\sqrt{2}/2$	$\nearrow$	$+\infty$
$y_3(t)$	1	$\searrow$	$-1/2$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y_3'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	

22. Donner l'allure de la courbe (Γ_3). On rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$.



4 Quatrième partie – Limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

On considère la série $R = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ et la suite de ses sommes partielles définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

23. Justifier que R converge vers une limite ℓ.

R est une série de Riemann qui converge car $2 > 1$.

24. Déterminer des réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\},\ \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\},\ \tfrac{1}{x(x-1)} = \tfrac{a}{x} + \tfrac{b}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\},\ 1 = a(x-1) + bx \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\},\ 1 = (a+b)x - a \end{aligned}$$

Ainsi $a = -1$ et $b = 1$ conviennent.

25. En déduire que $\ell \leqslant 2$.

$\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{-1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n}$

Par passage à la limite on obtient $\ell \leqslant 2$.

On considère à présent la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

26. Exprimer R_{2n} en fonction de R_n et S_n.
En déduire que (S_n) converge vers une limite ℓ' puis exprimer ℓ' en fonction de ℓ.

$R_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Ainsi $R_{2n} = \frac{1}{4}R_n + S_n$

Dès lors $S_n = R_{2n} - \frac{1}{4}R_n$ et puisque (R_n) à une limite finie ℓ, on en déduit que S_n a une limite finie ℓ' telle que $\ell' = \ell - \frac{1}{4}\ell = \frac{3}{4}\ell$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère à présent $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ les n racines de T_n avec $k \in [\![1;n]\!]$.

27. Montrer que T_n peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
En déduire que $\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$.

T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et dont les racines sont les x_k avec $k \in [\![1;n]\!]$, donc :

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

Dès lors :

$$T_n' = 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(X - x_k)\right)$$

Ainsi :

$$\frac{T_n'}{T_n} = \frac{2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(X - x_k)}{2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(X - x_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(X - x_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)}$$

Ce sont des produits télescopiques. Seul un terme reste au dénominateur $\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X - x_i}$

28. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$.

On en déduit que :

$$\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

En évaluant en $X = 1$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = \frac{T_n'(1)}{T_n(1)}$

Or d'après l'équation différentielle obtenue précédemment, en prenant $X = 1$, on aboutit à $T_n'(1) - n^2T_n(1) = 0$; soit encore $\frac{T_n'(1)}{T_n(1)} = n^2$ (1 ne fait pas partie des racines de T_n).

Finalement : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$.

29. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$.

On vient de voir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$, or $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\left(\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\right)^2} = n^2$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = 2n^2$.

Dès lors puisque $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2 + \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} + 1 \right) = 2n^2$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n^2$ mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = 2n^2 - n$

30. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

— Étudions la fonction $f : x \mapsto \sin x - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

  f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = \cos(x) - 1$

  Or la fonction cosinus est toujours inférieure ou égale à 1 donc $f'(x)$ est négatif et f est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) \leqslant f(0) = 0$. Donc $f(x) \leqslant 0$ et $\sin x \leqslant x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

— Étudions la fonction $g : x \mapsto \tan x - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

  g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ g'(x) = 1 + (\tan(x))^2 - 1 = (\tan(x))^2 \geqslant 0$

  donc g est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ g(x) \geqslant g(0) = 0$.

  Donc $g(x) \geqslant 0$ et $\tan x \geqslant x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

31. En déduire un encadrement de S_n puis les valeurs des limites ℓ et ℓ'.

On vient de montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ donc $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\sin x} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{\tan x} \geqslant 0$.

En composant par la fonction carré : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{(\sin x)^2} \geqslant \frac{1}{x^2} \geqslant \frac{1}{(\tan x)^2} \geqslant 0$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\frac{1}{\left(\sin \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$ car $\displaystyle\frac{(2k-1)\pi}{4n} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

En sommant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2}$, c'est-à-dire :

$$2n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} \geqslant 2n^2 - n$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{16n^2}{(2k-1)^2\pi^2} = \frac{16n^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{16n^2}{\pi^2} S_n$

Donc $2n^2 \geqslant \dfrac{16n^2}{\pi^2} S_n \geqslant 2n^2 - n$ et finalement $\dfrac{\pi^2}{8} \geqslant S_n \geqslant \dfrac{\pi^2}{16}\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \ell' = \frac{\pi^2}{8}$.

On en déduit alors que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = \ell = \frac{\pi^2}{6}$ puisque $\ell' = \dfrac{3}{4}\ell$.

Fin du corrigé