Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2023

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques MP – MPI – PC – PSI

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $\mathcal{C}^n(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}^{n,pm}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}^n_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$, on définit **sa régularisée** $\widetilde{f}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$;
- on pourra dire qu'une fonction est **normalisée** lorsqu'elle sera confondue avec sa régularisée ;
- l'ensemble des fonctions normalisées de $\mathcal{C}^{n,pm}_{2\pi}$ sera noté $\widetilde{\mathcal{C}}^{n,pm}_{2\pi}$.

1 Projection sur l'espace des polynômes trigonométriques

On considère l'application $< .\,,. >$ définie par $< f\,,\,g > = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ pour f et g dans $\mathcal{C}^{0,pm}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $< .\,,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

- $\forall f,g \in \mathcal{C}^0_{2\pi},\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie car f et g sont des fonctions continues sur $[0,2\pi]$.
  De plus $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ car f et g sont à valeurs réelles ; ainsi $< .\,,. >$ est une forme.
- $\forall f,g \in \mathcal{C}^0_{2\pi},\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
  Ainsi $< .\,,. >$ est symétrique.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f_1, f_2, g \in \mathcal{C}^0_{2\pi},\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\lambda f_1(t)+f_2(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$
  par linéarité de l'intégrale.
  Ainsi $< .\,,. >$ est linéaire à gauche et donc bilinéaire (par symétrie).
- $< .\,,. >$ est définie positive car $\forall f \in \mathcal{C}^0_{2\pi},\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \underbrace{(f(t))^2}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale ;

  et de plus $\forall f \in \mathcal{C}^0_{2\pi},\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(t))^2\,\mathrm{d}t = 0 \ \Rightarrow\ \forall t \in [0,2\pi],\ f(t) = 0$
  car $t \mapsto (f(t))^2$ est positive et continue sur $[0,2\pi]$, d'où par périodicité : $f = 0_{\mathcal{C}^0_{2\pi}}$

$< .\,,. >$ est donc un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ en tant que forme bilinéaire symétrique définie positive.

2. $< .\,,. >$ est-il un produit scalaire sur $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$? Justifier votre réponse.

Soit f la fonction telle que $f(x)$ vaut 1 lorsque x est un multiple de 2π et 0 sinon.
Dès lors $f \in \mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$ et $< f\,,\,f > = 0$ mais f n'est pas la fonction nulle.
Ainsi $< .\,,. >$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{C}^{0,pm}_{2\pi}$.

3. Montrer que $< .\,,. >$ est un produit scalaire sur $\widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$.

Un raisonnement analogue à la question 1 permet de montrer que $< .\,,. >$ est une forme bilinéaire symétrique et que $\forall f \in \widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi},\ < f\,,\,f > \geqslant 0$.

Par ailleurs, considérons une fonction $f \in \widetilde{\mathcal{C}}^{0,pm}_{2\pi}$ telle que $< f\,,\,f > = 0$, il vient : $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(t))^2\,\mathrm{d}t = 0$

Soit $(a_1,\dots,a_n)$ une subdivision de $[0,2\pi]$ telle que f est continue sur $]a_i,a_{i+1}[$ pour chaque $i\in[\![1,n-1]\!]$.
Dès lors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{\int_{a_i}^{a_{i+1}}(f(t))^2\ \mathrm{d}t}_{\geqslant 0}=0\Rightarrow\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \int_{a_i}^{a_{i+1}}(f(t))^2\ \mathrm{d}t=0$

Soit $\varepsilon>0$ tel que $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ a_i+\varepsilon\leqslant a_{i+1}-\varepsilon$, c'est-à-dire que $\varepsilon\leqslant\displaystyle\min_{i\in[\![1,n-1]\!]}\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)$, on a :
$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \displaystyle\int_{a_i+\varepsilon}^{a_{i+1}-\varepsilon}(f(t))^2\ \mathrm{d}t=0$
Par continuité de f sur les intervalles $]a_i,a_{i+1}[$ pour $n\in[\![1,n-1]\!]$:
$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \forall t\in[a_i+\varepsilon,a_{i+1}-\varepsilon],\ f(t)=0$
Puisque l'on peut choisir ε aussi proche de 0 que l'on veut : $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \forall t\in]a_i,a_{i+1}[,\ f(t)=0$
Puisque f est normalisée : $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ f(a_i)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a_i+h)+f(a_i-h)}{2}=\frac{0+0}{2}=0$
Ce résultat reste valable pour $a_1=0$ et $a_n=2\pi$ par un argument de périodicité de f.
Ainsi $\forall t\in[0,2\pi],\ f(t)=0$ et par périodicité f est nulle sur $\mathbb{R}$.

On muni $\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ du produit scalaire $<.\,,.>$.
On note $\|.\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par : $\forall f\in\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm},\ \|f\|_2=\sqrt{<f\,,f>}$.

On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions de $\widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ suivantes : $c_n:t\mapsto\cos(nt)$ et $s_n:t\mapsto\sin(nt)$.
On pose $F_n=\mathrm{Vect}(c_0,c_1,\dots,c_n,s_1,\dots,s_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que la famille $(c_0,c_1,\dots,c_n,s_1,\dots,s_n)$ est orthogonale.

— Soient p et q deux entiers naturels distincts, alors :

$$\begin{aligned}<c_p\,,c_q>&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(pt)\cos(qt)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos((p+q)t)+\cos((p-q)t)\right)\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}+\frac{\sin((p-q)t)}{p-q}\right]_0^{2\pi}\text{ car } p+q \text{ et } p-q \text{ sont non nuls}\\&=0\end{aligned}$$

— Soient p et q deux entiers naturels distincts avec q non nul, alors :

$$\begin{aligned}<c_p\,,s_q>&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(pt)\sin(qt)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\sin((p+q)t)+\sin((p-q)t)\right)\ \mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\cos((p+q)t)}{p+q}+\frac{\cos((p-q)t)}{p-q}\right]_0^{2\pi}\text{ car } p+q \text{ et } p-q \text{ sont non nuls}\\&=0\end{aligned}$$

— Soient p et q deux entiers naturels non nuls et distincts, alors :

$$\begin{aligned}<s_p\,,s_q>&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(pt)\sin(qt)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos((p-q)t)-\cos((p+q)t)\right)\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q}-\frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi}\text{ car } p+q \text{ et } p-q \text{ sont non nuls}\\&=0\end{aligned}$$

5. Déterminer la norme de c_n pour $n\in\mathbb{N}$ puis celle de s_n pour $n\in\mathbb{N}^\star$.
En déduire une base orthonormée de F_n pour $n\in\mathbb{N}$.

— $\|c_0\|_2^2=<c_0\,,c_0>=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(0))^2\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}2\pi=1$ donc $\|c_0\|_2=1$

— $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \|c_n\|_2^2=\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(nt))^2\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2nt)}{2}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{4\pi}\left[t+\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \|c_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

— $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \|s_n\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin(nt))^2\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1-\cos(2nt)}{2}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{4\pi}\left[t - \dfrac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \|s_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Finalement, $\left(c_0, \sqrt{2}c_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}s_n\right)$ est une base orthonormée de F_n.

6. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^{0,pm}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de $p_n(f)$, la projection orthogonale de f sur F_n.

$\left(c_0, \sqrt{2}c_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}s_n\right)$ étant une base orthonormée de F_n :

$$p_n(f) = < f\ ,\ c_0 > c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(< f\ ,\ \sqrt{2}c_k > \sqrt{2}c_k + < f\ ,\ \sqrt{2}s_k > \sqrt{2}s_k\right)$$

Finalement $p_n(f) = < f\ ,\ c_0 > c_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2 < f\ ,\ c_k > c_k + 2 < f\ ,\ s_k > s_k)$ et donc

$\forall x \in \mathbb{R},\ p_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t \cos(kx) + \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}t \sin(kx)\right)$

2 Coefficients et série de Fourier

Soit f de $\mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, on définit $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ les **coefficients de Fourier** de f par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

On définit également $S(f)$ la **série de Fourier** de f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$$

et $S_n(f)$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{0,pm}$, montrer que :
   — si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$;
   — si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = 0$.

— si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$ car :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \text{ posons } u = 2\pi - t \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t - \int_\pi^{0} \underbrace{f(2\pi-u)}_{=f(-u)=-f(u)}\ \underbrace{\cos(2n\pi - nu))}_{=\cos(nu)}\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(u)\cos(nu)\ \mathrm{d}u = 0 \end{aligned}$$

— si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = 0$ car :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \text{ posons } u = 2\pi - t \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t - \int_{\pi}^{0} \underbrace{f(2\pi-u)}_{=f(-u)=f(u)}\ \underbrace{\sin(2n\pi - nu)}_{=-\sin(nu)}\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(u)\sin(nu)\ \mathrm{d}u = 0\end{aligned}$$

8. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et x un réel strictement positif. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)e^{ixt}\ \mathrm{d}t = 0.$
Que peut-on en déduire concernant $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$?

En procédant à une intégration par parties :
$$\int_a^b f(t)e^{ixt}\ \mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{ix}\left(\left[f(t)e^{ixt}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)e^{ixt}\ \mathrm{d}t\right)$$
Dès lors : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)e^{ixt}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\underbrace{\left(|f(b)| + |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{\text{constant}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $\forall t \in [a,b],\ \left|e^{ixt}\right| = 1$

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)e^{ixt}\ \mathrm{d}t = 0$

Ainsi $\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t = 0$
En appliquant ce résultat à une fonction 2π-périodique et sur l'intervalle $[0,2\pi]$, on obtient que $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

3 Intégrale de Dirichlet

On définit les intégrales suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)\,t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\ \mathrm{d}t.$

9. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}.$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)\,t) - \sin((2n+1)\,t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+2)\,t)\sin(t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+2)\,t)\cancel{\sin(t)}}{\cancel{\sin(t)}}\ \mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin(2(n+1)t)}{2(n+1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0\end{aligned}$$
Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\pi}{2}.$

10. Montrer que $t \mapsto \dfrac{t - \sin t}{t\sin t}$ est prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ et préciser le prolongement.

— $t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t\sin t}$ est $\mathcal{C}^1\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.

— $\forall t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\},$
$$\begin{aligned}\frac{t-\sin t}{t\sin t} &= \frac{t - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t(t+o(t^2))} = \frac{\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} = \frac{\frac{t}{6} + o(t)}{1 + o(t)} \\ &= \left(\frac{t}{6} + o(t)\right)(1 + o(t)) = \frac{t}{6} + o(t)\end{aligned}$$

Ainsi f est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ en posant $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{6}.$

11. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - J_n)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}.$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\ \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t-\sin t}{t \sin t} \sin((2n+1)t)\ \mathrm{d}t$$

Or $t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t\sin t}$ est prolongeable en une fonction de $\mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ d'après la question 10

Ainsi en exploitant le résultat de la question 8 appliqué à la fonction ainsi prolongée :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t-\sin t}{t\sin t} \sin((2n+1)t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Dès lors $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$

De plus d'après la question 9, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)\,u)}{2\sin u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)\,u)}{2\sin u}\ \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\ \mathrm{d}t$ convergent vers $\dfrac{\pi}{2}$.

12. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ converge puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

- $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, A]$ pour tout réel $A > 0$.
- $\dfrac{\sin t}{t} \underset{0}{\sim} 1$ donc la fonction est intégrable au voisinage de 0.
- soit $A \geqslant 1$, en procédant à une intégration par parties on obtient $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t.$

  De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente et $\left|-\dfrac{\cos A}{A}\right| \leqslant \dfrac{1}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$

  Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nu)}{\cancel{n}u}\ \cancel{n}\mathrm{d}u$ en posant $u = \dfrac{t}{n}$

Or $\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nu)}{u}\ \mathrm{d}u\right)_{n\in\mathbb{N}}$ donc elles ont même limite.

On déduit de la question 11 que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nu)}{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$

4 Théorème de Dirichlet

On fixe dans cette partie $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{1,pm}_{2\pi}$.

13. Soit u un réel qui n'est pas un multiple de 2π. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^n \cos(ku) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{iku}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n (e^{iu})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{inu}}{1-e^{iu}} e^{iu}\right) \text{ car } e^{iu} \neq 1 \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{inu/2}(e^{-inu/2} - e^{inu/2})}{e^{iu/2}(e^{-iu/2} - e^{iu/2})} e^{iu}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{inu/2}\sin(nu/2)}{e^{iu/2}\sin(u/2)} e^{iu}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)u/2}\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}\right) = \frac{\cos((n+1)u/2)\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}\end{aligned}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\frac{\sin((n+1)u/2+nu/2)-\sin((n+1)u/2-nu/2)}{2\sin(u/2)}$$
$$=\frac{\sin((2n+1)u/2)-\sin(u/2)}{2\sin(u/2))}=\frac{\sin((n+1/2)u)}{2\sin(u/2)}-\frac{1}{2}$$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$

Il était également possible de montrer ce résultat par récurrence.

14. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n(f)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-u)\right)}{2\sin\left(\frac{x-u}{2}\right)}f(u)\ \mathrm{d}u.$

$$S_n(f)(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\ \mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t\cos(kx)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}t\sin(kx)\right)$$

d'où par 2π-périodicité :

$$S_n(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\ \mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t\cos(kx)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}t\sin(kx)\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx)\right)\right)f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right)f(t)\ \mathrm{d}t\ \text{et d'après la question 13}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}f(t)\ \mathrm{d}t$$

15. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n(f)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}f(u+x)\ \mathrm{d}u=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}f(x-u)\ \mathrm{d}u.$

— $S_n(f)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-u)\right)}{2\sin\left(\frac{x-u}{2}\right)}f(u)\ \mathrm{d}u$ posons $u=x+t$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}f(x+t)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(x+t)\ \mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(x+t)\ \mathrm{d}t\ \text{car}\ t\mapsto\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(x+t)\ \text{est}\ 2\pi\text{-périodique}$$

— $S_n(f)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-u)\right)}{2\sin\left(\frac{x-u}{2}\right)}f(u)\ \mathrm{d}u$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(x-t)\ \mathrm{d}t\ \text{en posant}\ u=x-t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(x-t)\ \mathrm{d}t\ \text{car}\ t\mapsto\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(x-t)\ \text{est}\ 2\pi\text{-périodique}$$

16. Conclure que $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n(f)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\left(f(u+x)+f(x-u)\right)\ \mathrm{d}u.$

En sommant les deux relations de la question 15 : $2S_n(f)(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\left(f(u+x)+f(x-u)\right)\mathrm{d}u$

De plus $u\mapsto\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\left(f(u+x)+f(x-u)\right)$ est paire donc :

$$\cancel{2}S_n(f)(x)=\cancel{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\left(f(u+x)+f(x-u)\right)\mathrm{d}u$$

17. On considère la fonction h définie par :

$$\forall u \in]0,\pi],\ h(u) = \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)$$

Montrer que h est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

On pourra noter $f(x^+) = \lim\limits_{t\to x^+} f(t)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{t\to x^-} f(t)$.

f étant $\mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$, $u \mapsto \dfrac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \widetilde{f}(x)$ l'est également, donc h est $\mathcal{C}^{1,pm}(]0,\pi])$.

$$\begin{aligned}\forall u \in]0,\pi],\ h(u) &= \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\\ &= \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)-(f(x^+)+f(x^-))}{2}\right) \text{ par définition de } \widetilde{f}\\ &= \frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)-f(x^+)}{u} - \frac{f(x+(-u))-f(x^-)}{(-u)}\right) \xrightarrow[u\to 0^+]{} 1\times(f'(x^+)-f'(x^-))\end{aligned}$$

Ainsi h est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$ en posant $h(0) = f'(x^+) - f'(x^-)$.

On admet, pour la question 18 uniquement, le **lemme de Riemann-Lebesgue** :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{0,pm}([a,b]),\ \lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = 0$$

18. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi h(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\mathrm{d}u$ puis que $S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\frac{u}{2}}\left(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\right)\mathrm{d}u - \frac{\widetilde{f}(x)}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$= S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x)$ car $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \underset{t=\frac{u}{2}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t = \pi$ d'après la question 9

De plus, on a vu en question 17 que h était prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$.

En appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction h, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n(f)(x) - \widetilde{f}(x)\right) = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \widetilde{f}(x)$ et $S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.

5 Étude d'une fonction auxiliaire

On définit à présent $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ et $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

19. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

— soit $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

— soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

— $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dès lors le théorème de continuité nous permet d'affirmer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin F est paire car $\cos$ est paire.

20. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F(x) = \dfrac{2}{x}G(x)$.

Procédons à une intégration par parties :
$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \left[\dfrac{\sin(xt)}{x(1+t^2)}\right]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{-2t\sin(xt)}{x(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{x}G(x)$
Cette intégration par partie est valide car :

— $\dfrac{\sin(xt)}{x(1+t^2)}$ est définie en 0.

— $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left|\dfrac{\sin(xt)}{x(1+t^2)}\right| \leqslant \lim_{t\to+\infty}\dfrac{1}{x(1+t^2)} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\dfrac{\sin(xt)}{x(1+t^2)} = 0.$

21. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G'(x) = F(x) - H(x)$.

— soit $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

— soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $t \mapsto \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^3}$.

— soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\right) = \dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

— soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} \leqslant \dfrac{t^2}{t^4} = \dfrac{1}{t^2}$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dès lors le théorème de dérivation nous informe du caractère $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$ de G et que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{(1+t^2)\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t - \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = F(x) - H(x)$

22. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ H'(x) = -G(x)$.

— soit $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

— soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^4}$.

— soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right) = -\dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

— soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $\left|-\dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^3}$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dès lors le théorème de dérivation nous informe du caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ de H et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ H'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -G(x)$$

23. En déduire que F est dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F''(x) = F(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F(x) = \dfrac{2}{x}G(x)$ or G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc F l'est également et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F'(x) = -\dfrac{2}{x^2}G(x) + \dfrac{2}{x}G'(x) = -\dfrac{1}{x}F(x) + \dfrac{2}{x}(F(x) - H(x)) = \dfrac{1}{x}F(x) - \dfrac{2}{x}H(x)$
F et H étant dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$, F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F''(x) &= -\frac{1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}F'(x) + \frac{2}{x^2}H(x) - \frac{2}{x}H'(x)\\ &= -\frac{1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}F(x) - \frac{2}{x}H(x)\right) + \frac{2}{x^2}H(x) + \frac{2}{x}G(x) = \frac{2}{x}G(x) = F(x)\end{aligned}$$

Dès lors F'' est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$.

24. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ donc F est bornée sur $\mathbb{R}$.
On a de plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F''(x) = F(x)$ d'après la question 23, donc $\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F(x) = Ae^x + Be^{-x}$.
Puisque F est bornée, l'étude de la limite en $+\infty$ impose $A = 0$.
La relation reste vraie en 0 (car F y est continue d'après la question 19), ainsi $F(0) = B$.
Par ailleurs $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-x}$.
Enfin d'après la question 19, F est paire donc $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ F(x) = F(\underbrace{-x}_{\geqslant 0}) = \dfrac{\pi}{2}e^{x}$
Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$.

6 Un développement en série de Fourier

Soient $a > 0$ et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ avec $\forall n \in \mathbb{Z},\ f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2}$.

25. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x) + f_{-n}(x))$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n'(x) + f_{-n}'(x))$ convergent normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.

- Soit $n \geqslant 1$ et $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $|f_n(x) + f_{-n}(x)| = \dfrac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2} + \dfrac{1}{(2n\pi - x)^2 + 4a^2}$
  Or $x + 2n\pi \geqslant -2\pi + 2n\pi = 2(n-1)\pi \geqslant 0$ et $2n\pi - x \geqslant 2n\pi - 2\pi = 2(n-1)\pi \geqslant 0$
  Ainsi $|f_n(x) + f_{-n}(x)| \leqslant \dfrac{2}{(2(n-1)\pi)^2 + 4a^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{((n-1)\pi)^2 + a^2}$
  De plus $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{((n-1)\pi)^2 + a^2}$ est le terme général d'une série à termes positifs convergente car équivalent à $\dfrac{1}{2n^2\pi^2}$, donc $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x) + f_{-n}(x))$ converge normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.
- Soit $n \geqslant 1$ et $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $|f_n'(x) + f_{-n}'(x)| \leqslant \dfrac{2|x+2n\pi|}{\left((x+2n\pi)^2 + 4a^2\right)^2} + \dfrac{2|2n\pi - x|}{\left((2n\pi - x)^2 + 4a^2\right)^2}$
  Or $x + 2n\pi \geqslant -2\pi + 2n\pi = 2(n-1)\pi \geqslant 0$ et $2n\pi - x \geqslant 2n\pi - 2\pi = 2(n-1)\pi \geqslant 0$
  Ainsi $|f_n'(x) + f_{-n}'(x)| \leqslant \dfrac{2\left(|x+2n\pi| + |2n\pi - x|\right)}{\left((2(n-1)\pi)^2 + 4a^2\right)^2} \leqslant \dfrac{2\left(4n\pi + 4\pi\right)}{\left((2(n-1)\pi)^2 + 4a^2\right)^2} = \dfrac{8(n+1)\pi}{\left((2(n-1)\pi)^2 + 4a^2\right)^2}$
  De plus $\dfrac{8(n+1)\pi}{\left((2(n-1)\pi)^2 + 4a^2\right)^2}$ est le terme général d'une série à termes positifs convergente car équivalent à $\dfrac{1}{2n^3\pi^3}$, donc $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n'(x) + f_{-n}'(x)\right)$ converge normalement sur $[-2\pi, 2\pi]$.

26. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_0(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x) + f_{-n}(x))$
  or $f_n(x) + f_{-n}(x) = \dfrac{1}{(x+2n\pi)^2 + 4a^2} + \dfrac{1}{(x-2n\pi)^2 + 4a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2\pi^2} + \dfrac{1}{4n^2\pi^2} = \dfrac{1}{2n^2\pi^2}$
  donc cette série à termes positifs est convergente d'après la règle des équivalents et d'après Riemann. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.
- On a :
  - $x \mapsto f_0(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ x \mapsto f_n(x) + f_{-n}(x)$ sont dans $\mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$.
  - $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x) + f_{-n}(x))$ converge simplement sur $[-2\pi, 2\pi]$ d'après la question 25.
  - $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n'(x) + f_{-n}'(x)\right)$ converge uniformément sur $[-2\pi, 2\pi]$ d'après la question 25.

Donc $f \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$.

27. Montrer que f est paire, 2π-périodique et dans $\mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$.

— $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f_0(-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(-x) + f_{-n}(-x)) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_{-n}(x) + f_n(x)) = f(x)$

Donc f est paire.

— $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$

Donc f est 2π-périodique.

— Comme $f \in \mathcal{C}^1([-2\pi, 2\pi])$, on en déduit par périodicité (de f et donc aussi f') que f est dans $\mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$.

28. Déterminer $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi a} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(2nat)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

f est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et périodique d'après la question 27, donc d'après la question 7 : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = 0$.
Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(t) \cos(nt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_k(t) + f_{-k}(t)) \right) \cos(nt)\ \mathrm{d}t$$

or d'après la question 25 la série converge normalement et donc uniformément sur $[0, 2\pi]$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f_0(t) \cos(nt)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} (f_k(t) + f_{-k}(t)) \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f_0(t) \cos(nt)\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} f_k(t) \cos(nt)\ \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f_{-k}(t) \cos(nt)\ \mathrm{d}t \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_k(t) \cos(nt)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{(t+2k\pi)^2 + 4a^2}\ \mathrm{d}t \text{ posons } u = t + 2k\pi$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\cos(n(u - 2k\pi))}{u^2 + 4a^2}\ \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\cos(nu)}{u^2 + 4a^2}\ \mathrm{d}u \text{ par } 2\pi\text{-périodicité}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nu)}{u^2 + 4a^2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2nat)}{4a^2t^2 + 4a^2}\ 2a\,\mathrm{d}t \text{ en posant } u = 2at$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{2\pi a} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos(2nat)}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi a} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(2nat)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ par parité.

29. En déduire une expression simple de $a_n(f)$ puis le développement en série de Fourier de f.

D'après la question 28, $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ b_n(f) = 0$. De plus :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{a\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(2nat)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{a\pi} F(2na) = \dfrac{1}{a\pi} \dfrac{\pi}{2} e^{-|2na|}$ d'après la question 24

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{2a} e^{-2na}$ car $a > 0$.

On en déduit le développement en série de Fourier de f : $\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = \dfrac{1}{4a} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2a} e^{-2na}\cos(nx)$.

30. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}\pi$.

D'après la question 27, $f \in \mathcal{C}^{1,pm}(\mathbb{R})$ donc d'après la question 18 : $\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.
Puisque f est continue sur $[-2\pi, 2\pi]$ on en déduit que $\forall x \in [-2\pi, 2\pi],\ \widetilde{f}(x) = f(x)$,
ainsi $\forall x \in [-2\pi, 2\pi],\ S(f)(x) = f(x)$.
De plus $f(0) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4a^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2\pi^2}$

$$\begin{aligned}
\text{et } S(f)(0) &= \frac{1}{4a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2a} e^{-2na} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-2a}\right)^n = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a}\frac{1}{1-e^{-2a}}e^{-2a} \\
&= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-e^{-2a}}e^{-2a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1-e^{-2a}+2e^{-2a}}{2(1-e^{-2a})}\right) = \frac{1}{4a}\left(\frac{1+e^{-2a}}{1-e^{-2a}}\right) \\
&= \frac{1}{4a}\left(\frac{\cancel{e^{-a}}(e^a + e^{-a})}{\cancel{e^{-a}}(e^a - e^{-a})}\right) = \frac{1}{4a}\frac{\cancel{2}\,\mathrm{ch}(a)}{\cancel{2}\,\mathrm{sh}(a)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+n^2\pi^2} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{ch}(a)}{\mathrm{sh}(a)}$, d'où en évaluant en $a = \pi$: $\displaystyle\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}\pi$.

Fin du corrigé