20 - Déterminer en fonction de R et de C l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_c aux bornes du condensateur atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape.

Dans la suite, on considérera que la charge est totalement achevée à cet instant t_1 (donc $u_c(t_1) \simeq E/2$), et qu'on passe en phase 2 (basculement de l'interrupteur en position (2)).

21 - Exprimer la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, qui commence à l'instant t_1.

22 - Tracer l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.

23 - Exprimer l'intensité i_c qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de t.

24 - Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge. On utilisera $\mathrm{e}^{-5} \simeq 0$.

25 - En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages par rapport à la première méthode.

III.3 Généralisation à une charge en N étapes

La section III.2 montre que la charge fractionnée en deux étapes permet un meilleur rendement. Nous établissons ici l'expression du rendement pour un fractionnement en N étapes. Notons $t_0 = 0$ l'instant initial où le condensateur est déchargé. La première étape a lieu de t_0 à $t_1 = 5\tau$, par un générateur de tension E/N, à travers une résistance R.

De manière générale, l'étape numéro k de la charge ($k = 1$ à N) a lieu de t_{k-1} à t_k, par un générateur de tension kE/N, à travers une résistance R.
On a $t_k = k \times 5\tau$.
Au début de l'étape k, $u_c(t_{k-1}) = (k-1)E/N$, et à la fin de l'étape k, $u_c(t_k) = kE/N$.

Lors de l'étape k de la charge, déterminer (notamment en fonction de k et de N) :

26 - l'équation différentielle suivie par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur, puis l'expression de sa solution $u_c(t)$,

27 - l'expression de l'intensité $i_c(t)$ traversant le condensateur,

28 - l'expression de l'énergie fournie par le générateur (on utilisera $\mathrm{e}^{-5} \simeq 0$).

En déduire ensuite :

29 - l'expression de l'énergie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge,

30 - puis montrer enfin que le rendement de la charge en N étapes s'écrit $\eta = \dfrac{N}{N+1}$.

III.4 Point de vue thermodynamique

La partie III.3 montre que le rendement de la charge peut tendre vers 1 si on multiplie les étapes. D'un point de vue thermodynamique, ceci devrait se traduire par une charge réversible, ce que nous allons prouver ici. Cette sous-partie ne nécessite pas d'avoir traiter les autres pour y répondre.

On considère une résistance R parcourue par un courant constant I. Le régime est stationnaire. On s'intéresse uniquement aux irréversibilités liées à l'effet Joule, et en particulier la température et la pression du matériau qui constitue la résistance sont uniformes, constantes, égales respectivement à la température T_0 et à la pression p_0 du milieu extérieur.

31 - Déterminer l'expression du transfert thermique Q reçu par la résistance pendant une durée Δt, de la part du milieu extérieur, en fonction de R, I et Δt. Commenter son signe.

32 - Déterminer l'expression de l'entropie créée pendant une durée Δt, en fonction de T_0, R, I et Δt. Commenter son signe.

33 - En déduire une relation générale entre l'énergie $\mathcal{E}_{\text{diss}}$ dissipée par effet Joule dans la résistance (énergie dégradée ou gâchée), l'entropie créée et la température T_0 du milieu extérieur.

Retournons à la charge du condensateur. Nous avons montré que pour une charge en N étapes à travers une résistance R, jusqu'à une tension finale E, le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge ($\mathcal{E}_{\text{stockée}} = CE^2/2$) et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge s'écrit :

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{N}{N+1}. \tag{3}$$

34 - En déduire l'expression de l'entropie créée lors de la charge en fonction de N, E et C. Peut-on tendre vers la réversibilité en multipliant les étapes ?

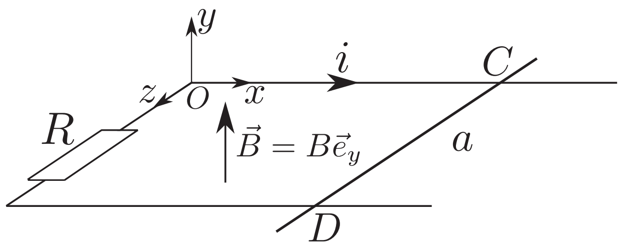
IV Principe de la recharge par induction

Le tramway T3 évoqué dans la partie II peut recharger ses supercondensateurs en convertissant, lors des freinages, son énergie cinétique en énergie électrique. Le principe utilisé est celui de l'induction. Le dispositif est généralement une génératrice en rotation, mais nous l'illustrons ici simplement sur le dispositif linéaire des rails de Laplace.

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact C et D est notée a, sa masse m, et elle peut glisser sans frottement sur les rails.

On note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée usuelle. Le champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_y$ est constant et uniforme à travers le circuit. La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_y$.

La tige est initialement à l'abscisse $x = 0$, et elle est lancée avec une vitesse initiale v_0 vers les x positifs.



La résistance R représente un dipôle résistif à alimenter. On néglige toute autre résistance, ainsi que les phénomènes d'autoinduction.

35 - Donner l'expression de la résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur la tige, $\vec{F}_L = i\,\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$, en fonction de a, B, i et d'un vecteur unitaire de la base.

36 - Montrer que le courant induit i s'écrit $i = aBv/R$, avec v la composante de la vitesse de la tige selon $\vec{e}_x$.

37 - Établir une expression de $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a, B et i.

38 - En déduire une expression de $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$, où E_c est l'énergie cinétique de la tige, en fonction de R et i uniquement.

Conclure sur le rendement de la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique reçue par le dipôle R.

39 - Un tramway Citadis a une masse d'environ 50 tonnes. Quelle est la valeur de son énergie cinétique s'il roule à 36 km/h ?

L'énergie stockée dans les supercondensateurs de cette rame est de l'ordre de 50×10^6 J. Quel pourcentage la récupération d'énergie par induction permet-elle de recharger ?