CONCOURS
CPGE
EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 17 Avril 2021

EPREUVE : MATHEMATIQUES

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2021

Epreuve de Mathématiques PT - TSI

Les deux problèmes proposés ci-dessous sont indépendants.

■ PROBLÈME I : ETUDE DE COURBES PARAMÉTRÉES

On considère dans le plan une droite $\mathcal{D}$ et un point F, situé à une distance $p > 0$ de la droite $\mathcal{D}$. On choisit désormais un repère orthonormé Oxy dans lequel la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -\frac{p}{2}$ et le point F a pour coordonnées $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$. Dans la suite, la lettre t désigne toujours un réel quelconque.

1°) *Etude d'une parabole*

a) Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on considère, pour tout réel t, les deux points suivants :
- le point $P(t)$, de coordonnées $(t,\ f(t))$.
- le point $H(t)$, de coordonnées $\left(t,\ -\frac{p}{2}\right)$.

Pour tout réel t, établir que le point $P(t)$ est équidistant de la droite $\mathcal{D}$ et du point F si et seulement si l'on a : $f(t) = \frac{t^2}{2\,p}$.

Dans la suite de ce problème, la fonction f est désormais fixée par l'expression précédente.

b) Tracer la courbe représentative $\mathcal{P}$ de l'application associant à tout réel t le point $P(t)$.

c) Expliciter une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$.

d) Montrer que le triangle de sommets $P(t),\ F,\ H(t)$ est isocèle en $P(t)$.
Préciser les coordonnées du point $I(t)$, milieu du côté $FH\,(t)$ de ce triangle.
Quelle est la courbe décrite par le point $I(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

e) Vérifier que la droite $P(t)\,I(t)$ est la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$.
En déduire que la tangente à la courbe $\mathcal{P}$ en $P(t)$ est, dans le triangle de sommets $P(t),\ F,\ H(t)$, la hauteur issue du sommet $P(t)$ ainsi que la médiatrice du côté $FH\,(t)$.

f) Ecrire l'équation de la normale passant par O à la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$.
En déduire les coordonnées de la projection $M(t)$ de l'origine O sur la tangente $\mathcal{T}(t)$ à $\mathcal{P}$ en $P(t)$.

2°) *Etude de la podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à son sommet O.*

On considère l'application associant à tout réel t le point $M(t)$ dont les coordonnées sont :

$$x(t) = \frac{t^3}{2\left(t^2 + p^2\right)} \quad ; \quad y(t) = \frac{-p\,t^2}{2\left(t^2 + p^2\right)}.$$

On désigne par C la courbe représentative de cette application associant au réel t le point $M(t)$.

a) Déterminer pour tout réel t les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.

b) Dresser un tableau de variation des fonctions x et y sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer la pente de la droite $M\,(0)\,M(t)$ et sa limite lorsque t tend vers 0.
En déduire quelle est la tangente à la courbe C au point $M(0)$.

c) Construire sur une même figure rapportée au repère Oxy les deux courbes $\mathcal{P}$ et C dans le cas où la distance p est choisie égale à 2.

■ PROBLÈME II : SOMME DE DEUX PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans ce problème, on considère un espace vectoriel réel E supposé de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, et on se propose d'étudier la somme de deux projecteurs de E qui commutent. Dans la partie I, on traite un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$, avant d'examiner le cas général dans la partie II.

■ PRÉLIMINAIRES

1°) On rappelle qu'un endomorphisme f de E est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $f^2 = f$ et on convient de noter Id l'application Identité de E.

a) Etablir qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur.
Dans toute la suite de cette question, on suppose que p est un projecteur de E.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.

c) A l'aide de l'égalité : $\forall\, x \in E,\ x = p(x) + (x - p(x))$, montrer que: $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

d) Ecrire la matrice de p dans une base de E obtenue par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
En déduire que p est diagonalisable et préciser ses valeurs propres et leurs ordres de multiplicité en fonction de son rang.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère les endomorphismes p et q dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Calculer les matrices P^2 et Q^2.

b) Déterminer des bases de l'image et du noyau de chacun des deux endomorphismes p et q.
En déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques des endomorphismes p et q.

c) Calculer enfin les produits $P\,Q$ et $Q\,P$.

3°) *Etude de l'endomorphisme* $p + q$

a) Ecrire la matrice $P + Q$ et déterminer son polynôme caractéristique.

b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $p + q$. Celui-ci est-il diagonalisable?

c) Préciser des vecteurs propres v_0, v_1, v_2 associés aux valeurs propres 0, 1, 2 de $p + q$.
On choisira ces vecteurs propres v_0, v_1, v_2 avec une première composante égale à 1.

d) En déduire une matrice inversible R telle que $R^{-1}(P + Q)\,R = D$ soit diagonale, et préciser D.
Déterminer les images des vecteurs v_0, v_1, v_2 par p et par q, et en déduire $R^{-1}\,P\,R$ et $R^{-1}\,Q\,R$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

Dans cette partie, on considère à nouveau un espace vectoriel réel E de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, on note Id l'endomorphisme identité de E, et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

4°) *Etude des valeurs propres de* $f = p + q$

a) Exprimer f^2 et f^3 en fonction de p, de q, et de $p \circ q = q \circ p$.
   En déduire des réels β et γ tels que : $f^3 + \beta f^2 + \gamma f = 0$.

b) Soit x un vecteur propre de l'endomorphisme f associé à une valeur propre λ.
   Préciser $f^2(x)$ et $f^3(x)$ en fonction de λ et x, puis montrer que : $\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \gamma \lambda = 0$.

c) En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$.

5°) *Etude des sous-espaces propres de* $f = p + q$

a) Démontrer l'égalité : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(q)$.
   En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(p + q - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Im}(q)$.

b) A quelles conditions portant sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$, $\mathrm{Ker}(q)$, $\mathrm{Im}(p)$, $\mathrm{Im}(q)$ chacun des réels 0 et 2 est-il valeur propre de $f = p + q$?
   Préciser dans ce cas les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres 0 et 2.

c) Montrer l'inclusion : $\mathrm{Im}\left(2f - f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$.
   En vérifiant l'égalité : $x = (\mathrm{Id} - f)^2\,(x) + \left(2f - f^2\right)(x)$, montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f) \subset \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right)$.
   En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right) = \mathrm{Im}(p + q - 2\,p \circ q)$.

d) Calculer $(\mathrm{Id} - 2\,p)^2$ et $(\mathrm{Id} - 2\,p) \circ (p + q - 2\,p \circ q)$.
   En déduire que 1 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $p \neq q$.

6°) *Réduction de l'endomorphisme* $f = p + q$

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2\,x_2$.
   Exprimer $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction de x_0, x_1, x_2.
   En déduire x_0, x_1, x_2 en fonction de x, $f(x)$, $f^2(x)$.

b) Etablir alors que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

c) Etablir que l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et préciser les projecteurs π_0, π_1, π_2 associant à un vecteur x ses projections sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ dans la direction de la somme des deux autres.