Le condensateur pour stocker de l'énergie

Total barème :
I électrostatique 18pt + II supercondensateurs 9pt + III charge 63pt + IV induction 10pt = 100 points

I Principe de fonctionnement du condensateur (18pt)

I.1 Modèle électrostatique (14pt)

1 - ⋆ Soit un point M. Distribution de charges symétrique par rapport à un plan $(M,\vec{e}_x,\vec{e}_z)$ et par rapport à un plan $(M,\vec{e}_y,\vec{e}_z) \Rightarrow \vec{E} = E(x,y,z)\vec{e}_z$.

⋆ Distribution de charges invariante par translation selon x et $y \Rightarrow \vec{E} = E(z)\vec{e}_z$.

⋆ Plan $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ est plan de symétrie de la distribution de charges $\Rightarrow E(-z) = -E(z)$.

⋆ Soit un point $M(x,y,z>0)$. Surface de Gauss : *par exemple* un cube de côté a orthogonal au plan, dont la face supérieure est en z et celle inférieure en $-z$.

À travers cette surface, flux $\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = a^2E(z) - a^2E(-z) = 2a^2E(z)$.

⋆ Théorème de Gauss : $\Phi = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$, soit $2a^2E(z) = a^2\sigma/\varepsilon_0$, d'où $E(z) = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

⋆ Bilan : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z}$ pour $z>0$, et donc l'opposé pour $z<0$.

(symétries et invariances : **2 pt**, $E(z) = -E(-z)$: **1 pt**, flux de $\vec{E}$: **1 pt**, th. de Gauss : **1 pt**, résultat : **1 pt**)

2 - On utilise la question précédente et le théorème de superposition.

Entre les plaques : $\boxed{\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z.}$ Ailleurs, $\boxed{\vec{E} = \vec{0}.}$ (**2 pt**)

3 - ⋆ $U = -\displaystyle\int_0^e \vec{E}\cdot\mathrm{d}z\,\vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\times e$.

⋆ Or $Q = S\sigma$.

D'où $U = \dfrac{Qe}{S\varepsilon_0}$, soit $CU = Q$ avec $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}.}$

⋆ AN : $C = \dfrac{10^{-11}\times(10^{-2})^2}{10^{-4}} = \underline{10^{-11}\,\mathrm{F}}$.

(Expression de U : **1 pt**, résultat pour C : **1 pt**, AN : **1 pt**.)

4 - Énergie stockée : $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \displaystyle\iiint \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}\tau = Se\times\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2$.

Puis $\sigma = Q/S = CU/S$, soit après simplifications : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}CU^2.}$

(Idée intégration : **1 pt**, résultat : **2 pt**)

I.2 Modèle électrocinétique (4pt)

5 - On dérive la relation $Q = CU$ par rapport au temps : $i = C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$. (**1 pt**)

6 - Puissance reçue : $\mathcal{P} = U\times i = U\,C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}CU^2\right)$. (**1 pt**)

Or $\mathcal{P} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathrm{d}t}$, d'où $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}CU^2$. (**2 pt**)

II Un exemple d'utilisation des condensateurs : les supercondensateurs (9pt)

7 - L'énergie mécanique est $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \dfrac{d}{v} \times \mathcal{P}_m = \dfrac{400 \times 500 \times 10^3}{15/3{,}6} = \underline{4{,}8 \times 10^7\,\text{J}}$. (formule : **1 pt**, AN : **2 pt**)

8 - L'énergie totale stockée dans les supercondensateurs doit être égale à l'énergie mécanique dépensée, soit :

$$N \times \frac{1}{2}CU^2 = \mathcal{E}_{\text{tot}}, \quad \text{soit} \quad C = \frac{2\mathcal{E}_m}{NU^2} = \frac{2 \times 4{,}8 \times 10^7}{48 \times 750^2} = \underline{3{,}6\,\text{F}}.$$

Gros par rapport à un condensateur classique (mais raisonnable pour un supercondensateur).

(formule : **1 pt**, AN : **1 pt**, commentaire : **1 pt**)

9 - L'ordre de grandeur de la charge peut être prise comme $5\,RC$ (on accepte autre chose que "5"). Il faut $5RC \simeq 20\,\text{s}$, soit donc $R \simeq \dfrac{20\,\text{s}}{5C} \simeq \underline{1\,\Omega}$.

(idée $\tau =$ quelques RC : **2 pt**, AN : **1 pt**.)

III Stratégies de charge d'un condensateur (63pt)

10 - η est sans dimension. Il n'y a aucun moyen de former une grandeur sans dimension par combinaison de R, C et E, donc η ne peut pas en dépendre. (**2 pt**)

III.1 Premier procédé de charge (13pt)

11 - Loi des mailles : $u_c + u_R = E$, puis $u_R = Ri_c = RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$.

Donc $u_c + RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = E$.

Avec $\boxed{\tau = RC,}$ on a bien $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}.}$

(Loi des mailles et de comportement : **1 pt**, résultat final : **1 pt**)

12 - $u_c(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{condensateur}}}{=} u_c(0^-) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{initialement déchargé}}}{=} 0$. (**1 pt** si justification correcte)

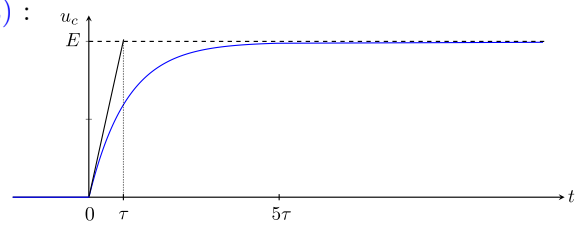
13 - ⋆ $u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{\text{particulière}}$, avec $u_{\text{particulière}} = \tau\dfrac{E}{\tau} = E$

⋆ A avec les conditions initiales : $u_c(0^+) = 0 = A + E$, donc $A = -E$.

⋆ Conclusion : $u_c(t) = -E\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$, soit $\boxed{u_c(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).}$

(solution générale : **1 pt**, détermination de A : **1 pt**)

14 - Allure de la solution (**1 pt**) :



15 - $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}Cu_c^2(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fin charge}}}{=} \dfrac{1}{2}CE^2$. (**1 pt**)

16 - $i_c(t) = C \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\right) = -CE\,\dfrac{(-1)}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Or $\tau = RC$, donc : $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$ (idée : **1 pt**, réalisation : **1 pt**)

17 - $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = u_{\text{générateur}} \times i_{\text{générateur}} = E \times i_c$, puis $\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} E \times i_c(t)\,\mathrm{d}t$. (formules : **1 pt**)

Calcul : $\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} E \times \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t = \ldots$, soit $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = CE^2.}$ (calcul : **2 pt**)

18 - On a $\eta = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \dfrac{CE^2/2}{CE^2}$, donc $\boxed{\eta = \dfrac{1}{2}.}$ (**1 pt**)

La moitié de l'énergie fournie est inutilement dissipée par effet Joule dans la résistance. Ceci ne dépend pas de la valeur de R, donc réduire R ne change rien.

III.2 Second procédé de charge (19pt)

19 - Même chose que dans la partie précédente en remplaçant E par $E/2$: $\boxed{u_c(t) = \dfrac{E}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$ (**2 pt**)

20 - Environ : $\boxed{t_1 = 5\tau = 5RC.}$ (**1 pt**)

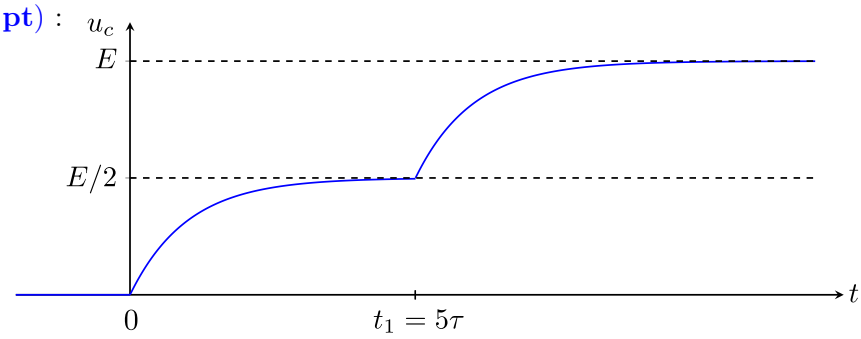
21 - ⋆ Loi des mailles et de comportement : $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$, $\tau = RC$. (**1 pt**)

⋆ Solution : $u_c(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{\text{particulière}}$, avec $u_{\text{particulière}} = \tau\dfrac{E}{\tau} = E$. (**1 pt**)

⋆ A avec les conditions initiales : $u_c(t_1) = \dfrac{E}{2}$ (continuité tension condensateur). Or $u_c(t_1) = A\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E$, donc $\boxed{A = -\dfrac{E}{2}\,\mathrm{e}^{t_1/\tau}.}$ (**1 pt**)

⋆ Conclusion : $u_c(t) = -\dfrac{E}{2}\mathrm{e}^{t_1/\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$, soit $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right).}$ (**2 pt**)

22 - Allure de la solution (**1 pt**) :



23 - $i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$.

⋆ Pour $t < t_1$: $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$ ⋆ Pour $t > t_1$: $\boxed{i_c(t) = \dfrac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}.}$ (**2 pt**)

24 - Similaire à la partie précédente.

⋆ Première phase :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{fournie},1} &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times i_c(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \times \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{4R}(-\tau)(\underbrace{\mathrm{e}^{-t_1/\tau}}_{=\mathrm{e}^{-5}\ll 1} - 1) \\ &= \frac{E^2}{4R}RC\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \frac{CE^2}{4}.}$$

⋆ Deuxième phase :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{fournie},2} &= \int_{t_1}^{+\infty} E \times i_c(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{2R}\left[-\tau\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right]_{t_1}^{+\infty} \\ &= \frac{E^2}{2R}(-\tau)(0-1) \\ &= \frac{E^2}{2R}RC\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{CE^2}{2}.}$$

⋆ Bilan : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{CE^2}{4} + \frac{CE^2}{2} = \frac{3}{4}CE^2.}$ **(2 pt + 2 pt + 1 pt)**

25 - Énergie stockée par le condensateur : $\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2}Cu_c^2(t=+\infty) = \frac{1}{2}CE^2$.

Rendement : $\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{CE^2/2}{(3/4)CE^2}$, donc $\boxed{\eta = \frac{2}{3} = 66\%.}$

Le rendement est de 66%, ce qui est mieux qu'avec la méthode 1.

Le désavantage est que le chargement est deux fois plus long : il faut attendre deux fois 5τ.

(Rendement : **2 pt**, avantage/désavantage : **1 pt**)

III.3 Généralisation à une charge en N étapes (18pt)

26 - ⋆ Loi des mailles et de comportement : $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{kE}{N\tau}$. **(1 pt)**

⋆ Solution : $u_C(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{kE}{N}$. **(1 pt)**

⋆ Détermination de A avec $u_C(t_{k-1}) = \frac{(k-1)E}{N} = A\mathrm{e}^{-t_{k-1}/\tau} + \frac{kE}{N}$,

d'où $A = \left(\frac{(k-1)E}{N} - \frac{kE}{N}\right)\mathrm{e}^{t_{k-1}/\tau} = -\frac{E}{N}\mathrm{e}^{t_{k-1}/\tau}$. **(1 pt)**

⋆ Finalement : $\boxed{u_C(t) = -\frac{E}{N}\mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau} + \frac{kE}{N}.}$ **(2 pt)**

27 - $\boxed{i_c(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{NR}\mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau}.}$ **(3 pt)**

28 - $\mathcal{E}_{\text{fournie},k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{kE}{N} \times i_c\mathrm{d}t = \frac{kE^2}{N^2R}(-RC)\left(\underbrace{\mathrm{e}^{-(t_k-t_{k-1})/\tau}}_{=\mathrm{e}^{-5}} - 1\right) \simeq \frac{kCE^2}{N^2}$. **(3 pt)**

29 - $\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{kCE^2}{N^2} = \frac{N(N+1)}{2}\frac{CE^2}{N^2} = \frac{(N+1)CE^2}{2N}$. **(4 pt)**

30 - L'énergie stockée est toujours $\frac{1}{2}CE^2$. Donc $\eta = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{(N+1)CE^2}{2N}}$, soit $\boxed{\eta = \frac{N}{N+1}.}$ **(3 pt)**

(Avantage : meilleur rendement, désavantage : plus long.)

III.4 Point de vue thermodynamique (11pt)

31 - ⋆ 1er principe version monobare à la résistance :

$$\Delta H = W_{\text{élec}} + Q. \quad (\text{ou encore : } \Delta U = W_{\text{élec}} + \underbrace{W_{\text{pression}}}_{-p_{\text{ext}}\Delta V = 0} + Q) \quad \textbf{(1 pt)}$$

⋆ Régime stationnaire : $\Delta H = 0$; et $W_{\text{élec}} = UI\Delta t = RI^2\Delta t$. **(1 pt)**

⋆ Conclusion : $\boxed{Q = -RI^2\Delta t,}$ négatif car la résistance cède de la chaleur. **(1 pt)**

32 - 2nd principe à la résistance : $\Delta S = S_e + S_c$. **(1 pt)**

Avec $\Delta S = 0$ car régime stationnaire ; et $S_e = \dfrac{Q}{T_0}$. **(1 pt)**

Conclusion : $\boxed{S_c = -\dfrac{Q}{T_0} = \dfrac{RI^2\Delta t}{T_0}.}$ Positif donc irréversible. **(1 pt)**

33 - On voit que $\boxed{T_0 S_c = \mathcal{E}_{\text{diss}}.}$ **(1 pt)**

34 - On a $\dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{stockée}} + \mathcal{E}_{\text{diss}}} = \dfrac{N}{N+1}$, soit $\mathcal{E}_{\text{diss}} = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{N} = \dfrac{1}{2N}CE^2$. **(1 pt)**

Donc $\boxed{S_c = \dfrac{1}{2NT_0}CE^2.}$ **(2 pt)**

Ceci tend vers 0 si N est grand : la charge devient réversible. **(1 pt)**

(mais comme toujours, la réversibilité se paie par une lenteur infinie...)

IV Principe de la recharge par induction (10pt)

35 - $\boxed{\vec{F}_L = i\,a\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_y = -iaB\,\vec{e}_x.}$ **(1 pt)**

36 - ⋆ Flux de $\vec{B}$ à travers le circuit (de normale $-\vec{e}_y$ imposée par le sens de i) : $\Phi = -B \times a\,x(t)$. **(1 pt)**

⋆ Fem induite : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Bav$. **(1 pt si loi Faraday correcte)**

⋆ Loi des mailles dans le circuit équivalent, loi d'Ohm : $e = Ri$, d'où $\boxed{i = \dfrac{aBv}{R}.}$ **(1 pt)**

37 - PFD sur la tige, projeté sur $\vec{e}_x$: $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -iaB.}$ **(1 pt (même si expression de F_L était fausse))**

38 - ⋆ Multiplication de l'équation précédente par v : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v = -iaBv$.

⋆ Or $v = \dfrac{Ri}{aB}$ (question 36).

Donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = -iaB\,\dfrac{Ri}{aB}$, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = -Ri^2.}$ **(2 pt)**

⋆ On voit que la diminution d'énergie cinétique est intégralement convertie en puissance reçue par le dipôle : le rendement est de 100%. **(1 pt)**

39 - $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{50 \times 10^3 \times (36/3{,}6)^2}{2} = \underline{2{,}5 \times 10^6\ \text{J}}$. **(1 pt)**

Ceci représente 5% de la capacité des batteries. **(1 pt)**