Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2021

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (Option - 2h)

■ PARTIE I : Irrationnalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ pour $\frac{k}{5}$ irréductible

1°) *Recherche d'un polynôme à coefficients entiers dont* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *est racine*

a) On a de façon immédiate : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Et aussi : $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ainsi que : $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Et de même : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Et enfin : $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ ainsi que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

b) Cherchons sous la forme $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ les racines de l'équation $z^5 + 1 = 0$.

Comme $-1 = e^{i\pi}$, celle-ci équivaut à $r^5\,e^{5i\theta} = e^{i\pi}$, soit encore : $r^5 = 1$ et $5\theta = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Ce qui donne $r = 1$ et $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{5}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Et les racines de l'équation $z^5 + 1 = 0$ sont les complexes $z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{5}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ou $0 \le k \le 4$ pour se limiter aux racines $z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{5}}$ qui sont distinctes. Comme $X^5 + 1$ est de degré 5, on a donc toutes ses racines, qui sont nécessairement simples, et qui sont donc :

$$z = e^{\frac{i\pi}{5}},\quad z = e^{\frac{3i\pi}{5}},\quad z = e^{\frac{5i\pi}{5}} = -1,\quad z = e^{\frac{7i\pi}{5}},\quad z = e^{\frac{9i\pi}{5}}.$$

La somme de ces 5 racines est nulle car :

$$\sum_{k=0}^{4} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{5}} = e^{\frac{i\pi}{5}} \sum_{k=0}^{4} \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^k = e^{\frac{i\pi}{5}}\,\frac{1 - e^{\frac{10i\pi}{5}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = e^{\frac{i\pi}{5}}\,\frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}} = 0.$$

En prenant la partie réelle de cette somme, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos(\pi) + \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

Soit encore, compte tenu de $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - 1 = 0 \quad \text{et :} \quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

c) On a la somme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$, et on calcule le produit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) = -\frac{1}{4}.$$

Il en résulte que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont les racines des polynômes du second degré suivant :

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} \qquad \text{ou} \qquad 4X^2 - 2X - 1.$$

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) < 0$ puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

2°) *Irrationnalité de de* $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ *lorsque* $\frac{k}{5}$ *est irréductible*

a) Supposons le réel $\sqrt{5}$ rationnel, avec $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$.

On a alors $a^2 = 5\,b^2$, et en factorisant en nombres premiers les entiers a et b sous la forme $a = 2^{\alpha_2}\,3^{\alpha_3}\,5^{\alpha_5}\,7^{\alpha_7}\ldots$ et $b = 2^{\beta_2}\,3^{\beta_3}\,5^{\beta_5}\,7^{\beta_7}\ldots$, l'égalité $a^2 = 5\,b^2$ devient :

$$2^{2\alpha_2}\,3^{2\alpha_3}\,5^{2\alpha_5}\,7^{2\alpha_7}\ldots = 2^{2\beta_2}\,3^{2\beta_3}\,5^{2\beta_5+1}\,7^{2\beta_7}\ldots$$

Par unicité de la factorisation en nombres premiers, cette égalité implique donc :

$$2\alpha_2 = 2\beta_2,\ 2\alpha_3 = 2\beta_3,\ 2\alpha_5 = 2\beta_5 + 1,\ 2\alpha_7 = 2\beta_7,\ \text{etc.}$$

L'égalité $2\alpha_5 = 2\beta_5 + 1$ étant impossible à réaliser puisque $2\alpha_5$ est pair et $2\beta_5 + 1$ impair, on a obtenu une contradiction. Il en résulte que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel.

- Donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ est irrationnel, sinon on pourrait l'écrire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, d'où :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{p}{q} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{5} = \frac{4p}{q} - 1 \in \mathbb{Q}.$$

C'est contradictoire puisque $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel. On procède de même avec $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

b) La fraction $\frac{k}{5}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est irréductible si et seulement si k n'est pas divisible par 5.

Et si k n'est pas divisible par 5, les valeurs prises par $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ appartiennent à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \left\{ \pm\cos\left(\frac{\pi}{5}\right),\ \pm\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right),\ \pm\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right),\ \pm\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right\}.$$

Or $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, et comme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont irrationnels, tous les réels de $\mathcal{E}$ sont irrationnels et $\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ est donc irrationnel si $\frac{k}{5}$ est irréductible.

■ PARTIE II : Irrationnalité de $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $\frac{k}{n+1}$ irréductible

On considère la suite de polynômes à coefficients réels définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0(X) = 1, \quad U_1(X) = 2X \quad \text{puis :} \quad \forall\, n \geq 2, \quad U_n(X) = 2X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X).$$

3°) *Premières propriétés des polynômes* U_n

a) On a facilement : $U_0 = 1$, $U_1(X) = 2X$, $U_2(X) = 4X^2 - 1$, $U_3(X) = 8X^3 - 4X$,
et $U_4(X) = 16X^4 - 12X^2 + 1$, $U_5(X) = 32X^5 - 32X^3 + 6X$.

b) Montrons par récurrence que U_k est de degré k et de coefficient dominant 2^k, autrement dit qu'il s'écrit sous la forme $U_k(X) = 2^k X^k + R_k(X)$ avec R_k de degré strictement inférieur à k.
Pour $0 \le k \le 5$, c'est vrai d'après a).
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$, et vérifions le au rang n :

$$U_n(X) = 2X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X) = 2X\left(2^{n-1}X^{n-1} + R_{n-1}(X)\right) - \left(2^{n-2}X^{n-2} + R_{n-2}(X)\right)$$
$$= 2^n X^n + (2X\,R_{n-1}(X) - R_{n-2}(X)).$$

Comme les degrés de R_{n-1} et R_{n-2} sont respectivement strictement inférieurs à $n-1$ et $n-2$, le degré de $2X\,R_{n-1}(X) - R_{n-2}(X)$ est strictement inférieur à n et le résultat est établi.

c) Pour $0 \le k \le 5$, on voit que : $U_k(0) = (-1)^{k/2}$ si k est pair, et $U_k(0) = 0$ si k est impair.
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$, et vérifions le au rang n.
La relation $U_n(X) = 2X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$ donne $U_n(0) = -U_{n-2}(0)$.
Si n est pair, $n-2$ l'est aussi et : $U_n(0) = -U_{n-2}(0) = -(-1)^{(n-2)/2} = (-1)^{n/2}$.
Si n est impair, $n-2$ l'est aussi et $U_n(0) = -U_{n-2}(0) = 0$.
Le résultat est bien démontré.

d) Montrons par récurrence que U_k est un polynôme à coefficients entiers.
Pour $0 \le k \le 5$, c'est vrai d'après a).
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$, et vérifions le au rang n.
La relation $U_n(X) = 2X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$ montre que U_n est encore à coefficients entiers car les coefficients de U_n s'obtiennent par somme et produit à partir de ceux de U_{n-1} et U_{n-2} qui sont entiers d'après l'hypothèse de récurrence.

e) Montrons par récurrence que U_k a la parité de k, c'est à dire : $U_k(-X) = (-1)^k\,U_k(X)$.
C'est vrai pour $0 \le k \le 5$ d'après ci-dessus.
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$, et vérifions le au rang n :

$$U_n(-X) = -2X\,U_{n-1}(-X) - U_{n-2}(-X) = (-1)^n\,2X\,U_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}\,U_{n-2}(X)$$
$$= (-1)^n\,(2X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)) = (-1)^n\,U_n(X).$$

Le résultat est bien démontré.

4°) *Factorisation dans* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes* U_n

a) Pour tout entier naturel k et tout réel θ non multiple de π, montrons que :

$$U_k(\cos(\theta)) = \frac{\sin((k+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}.$$

C'est vrai pour $k = 0$ puisque $U_0 = 1$.
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$, et vérifions le au rang n :

$$U_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\,U_{n-1}(\cos(\theta)) - U_{n-2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\,\frac{\sin(n\,\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\,\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Comme $\sin((n-1)\,\theta) = \sin(n\,\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(n\,\theta)$, on obtient comme attendu :

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\cos(\theta)\sin(n\,\theta) + \sin(\theta)\cos(n\,\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}.$$

b) Comme la fonction $x \mapsto U_n(x)$ est polynôme, donc continue, on a :

$$U_n(1) = \lim_{\theta \to 0} U_n(\cos(\theta)) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{(n+1)\,\theta}{\theta} = n+1.$$

- Et comme $U_n(-X) = (-1)^n\, U_n(X)$, on en déduit que :

$$U_n(-1) = (-1)^n\, U_n(1) = (-1)^n\,(n+1).$$

c) Cherchons les racines de U_n appartenant à $[-1, 1]$, et en fait à $]-1, 1[$ puisqu'on a $U_n(\pm 1) \neq 0$.
On peut les rechercher sous la forme $x = \cos(\theta)$ avec $0 < \theta < \pi$:

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\,\theta)}{\sin(\theta)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, k \in [\![1, n]\!] \;:\; \theta = \frac{k\,\pi}{n+1}.$$

On obtient ainsi n racines distinctes de U_n, qui sont : $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > \cos\left(\frac{2\,\pi}{n+1}\right) > \ldots > \cos\left(\frac{n\,\pi}{n+1}\right)$.

On a toutes les racines de U_n puisqu'il est de degré n, et comme son coefficient dominant est 2^n :

$$U_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right)\right).$$

5°) *Racines rationnelles des polynômes U_n*

On convient d'introduire la suite des polynômes (V_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n(X) = U_n\left(\frac{X}{2}\right)$.

a) D'après la question 3.a), les expressions de $V_n(X)$ pour $0 \leq n \leq 5$ sont : $V_0(X) = 1$, $V_1(X) = X$,
$V_2(X) = X^2 - 1$, $V_3(X) = X^3 - 2\,X$, $V_4(X) = X^4 - 3\,X^2 + 1$, $V_5(X) = X^5 - 4\,X^3 + 3\,X$.

b) La relation $U_n(X) = 2\,X\,U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$ donne, quitte à changer X en $X/2$:

$$V_n(X) = X\,V_{n-1}(X) - V_{n-2}(X).$$

Pour $0 \leq k \leq 5$, on voit que V_k est est à coefficients entiers.
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$.
La relation $V_n(X) = X\,V_{n-1}(X) - V_{n-2}(X)$ montre que V_n est encore à coefficients entiers car les coefficients de V_n s'obtiennent par somme et produit à partir de ceux de V_{n-1} et V_{n-2} qui sont entiers d'après l'hypothèse de récurrence.
Le résultat est bien démontré.

D'autre part, si on pose $V_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j^{(n)}\, X^j$, alors on a $U_n(X) = V_n(2\,X) = \sum_{j=0}^{n} 2^j\, \mu_j^{(n)}\, X^j$.
D'après la question 3° on sait que $2^n\, \mu_n^{(n)} = 2^n$, et le coefficient dominant $\mu_n^{(n)}$ de V_n est égal à 1.
Et comme les coefficients $\mu_j^{(n)}$ de V_n sont entiers, on en déduit que les réels $2^j\, \mu_j^{(n)}$ sont entiers.
Ainsi, les coefficients $2^j\, \mu_j^{(n)}$ de U_n sont donc des entiers multiples de 2^j pour $0 \leq j \leq n$.

c) Si $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible racine de V_n, on a $V_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, donc $q^n\, V_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.
Les coefficients μ_j du polynôme V_n sont entiers, et son coefficient dominant μ_n vaut 1.
On en déduit l'égalité suivante, qui apparaît finalement comme une égalité dans $\mathbb{Z}$:

$$q^n\, V_n\left(\frac{p}{q}\right) = q^n \sum_{j=0}^{n} \mu_j^{(n)} \left(\frac{p}{q}\right)^j \;=\; p^n + \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^{(n)}\, p^j\, q^{n-j} \;=\; 0.$$

- Comme q est en facteur dans l'entier $\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j^{(n)}\, p^j\, q^{n-j}$, l'entier q divise nécessairement p^n.
  Comme la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, les entiers p et q sont premiers entre eux, donc aussi les entiers p^n et q (car si q est premier avec l'entier p, il est premier avec le produit p^n).
  Comme q divise $p^n = 1 \text{ x } p^n$, il résulte du théorème de Gauss que q divise 1, donc $q = 1$.
  Il en résulte que $\frac{p}{q} = p$, et les seules racines rationnelles possibles de V_n sont des entiers $p \in \mathbb{Z}$.

d) Comme $V_n(2\,X) = U_n(X)$, on voit que $\frac{p}{q}$ est racine rationnelle de U_n si et seulement si $\frac{2\,p}{q}$ est racine rationnelle de V_n, ce qui implique l'existence d'un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{2\,p}{q} = m$ ou $\frac{p}{q} = \frac{m}{2}$.
Or d'après la question 4°, toutes les racines de U_n appartiennent à l'intervalle $]-1,\ 1[$.
On en déduit que si $\frac{m}{2}$ est racine de U_n, on a $-1 < \frac{m}{2} < 1$, et comme $m \in \mathbb{Z}$, on a : $m \in \{-1,\ 0,\ 1\}$.
Les seules racines rationnelles possibles de U_n sont donc 0 et $\pm\,\frac{1}{2}$.

6°) *Etude de l'irrationnalité des réels* $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ *pour* $\frac{k}{n+1}$ *irréductible*

a) On sait d'après 4° que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est racine de U_n, dont les seules racines rationnelles sont 0 et $\pm\,\frac{1}{2}$.
Or, pour $n > 2$, on a : $0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{3}$, donc $1 > \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
Donc $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ ne peut être une racine rationnelle de U_n, c'est donc un irrationnel.
En revanche, pour $n \leq 2$, on obtient : $\cos(\pi) = -1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ qui sont rationnels.

b) Pour $n > 2$ et $1 \leq k \leq n$, le réel $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est aussi racine de U_n, et pour qu'il soit rationnel, il faut qu'il soit égal à $-\frac{1}{2}$, 0 ou $\frac{1}{2}$, ce qui implique $\frac{k\pi}{n+1} = \frac{\pi}{3}$, $\frac{k\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{k\pi}{n+1} = \frac{2\pi}{3}$ car $0 < \frac{k\pi}{n+1} < \pi$, soit encore $\frac{k}{n+1} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$.

- Si $\frac{k}{n+1} = \frac{1}{3}$, on a $n+1 = 3\,k$ et k est un diviseur commun à k et $n+1$, strictement supérieur à 1 car $k = \frac{n+1}{3} > 1$ puisque $n > 2$. C'est contradictoire car k et $n+1$ sont premiers entre eux.
- Si $\frac{k}{n+1} = \frac{1}{2}$, on a $n+1 = 2\,k$ et k est un diviseur commun à k et $n+1$, strictement supérieur à 1 car $k = \frac{n+1}{2} > 1$ puisque $n > 2$. C'est contradictoire car k et $n+1$ sont premiers entre eux.
- Si $\frac{k}{n+1} = \frac{2}{3}$, on a $2\,(n+1) = 3\,k$, et 2 étant premier avec 3, 2 divise k (théorème de Gauss).
  Il existe donc $k' \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2\,k'$, d'où $n+1 = 3\,k'$ et k' est un diviseur commun à k et $n+1$ tel que $k' = \frac{n+1}{3} > 1$ puisque $n > 2$. C'est contradictoire car k et $n+1$ sont premiers entre eux.

Ainsi donc, pour $1 \leq k \leq n$ et $\frac{k}{n+1}$ irréductible, le réel $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel.
On notera que ce raisonnement montre d'une autre façon l'irrationnalité de $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ pour $n > 2$.

c) Le résultat étant établi pour $1 \leq k \leq n$, il reste à l'établir pour $k \geq n+1$.
Si $k \geq n+1$, on pose la division euclidienne de k par $n+1$: $k = q(n+1) + r$ avec $0 \leq r \leq n$.

On voit qu'un diviseur commun à k et $n+1$ est un diviseur commun à r et $n+1$ et inversement. Donc $\frac{k}{n+1}$ est irréductible si et seulement si $\frac{r}{n+1}$ l'est aussi et on a dans ce cas $1 \le r \le n$ et :

$$\cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{r\,\pi}{n+1} + q\,\pi\right) = (-1)^q \cos\left(\frac{r\,\pi}{n+1}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

7°) *Coefficients dans la base canonique des polynômes* U_n

a) Dérivons deux fois pour $0 < \theta < \pi$ l'égalité $\sin(\theta)\, U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\,\theta)$. Il vient :

$$\cos(\theta)\, U_n(\cos(\theta)) - \sin^2(\theta)\, U_n{}'(\cos(\theta)) = (n+1)\cos((n+1)\,\theta).$$

$$-\sin(\theta)\, U_n(\cos(\theta)) - 3\sin(\theta)\cos(\theta)\, U_n{}'(\cos(\theta)) + \sin^3(\theta)\, U_n{}''(\cos(\theta)) = -(n+1)^2 \sin((n+1)\,\theta).$$

Après division par $\sin(\theta)$ qui n'est pas nul pour $0 < \theta < \pi$, on a :

$$\sin^2(\theta)\, U_n{}''(\cos(\theta)) - 3\cos(\theta)\, U_n{}'(\cos(\theta)) - U_n(\cos(\theta)) = -(n+1)^2\, U_n(\theta).$$

En posant $x = \cos(\theta)$, on obtient donc pour $x \in\,]-1, 1[$:

$$\left(1 - x^2\right) U_n{}''(x) - 3\,x\, U_n{}'(x) + n(n+2)\, U_n(x) = 0.$$

Donc U_n est solution de l'équation différentielle $\left(1 - x^2\right) y'' - 3\,x\,y' + n(n+2)\,y = 0$ sur $]-1, 1[$, et en fait sur $\mathbb{R}$ puisque l'égalité polynomiale ci-dessus est valable pour une infinité de valeurs.

b) En posant $U_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k\, x^k$, mais en convenant que $\lambda_k = 0$ pour $k > n$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+2)\,(k+1)\,\lambda_{k+2}\, x^k - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\lambda_k\, x^k - 3\sum_{k=0}^{n} k\,\lambda_k\, x^k + n(n+2)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, x^k = 0$$

$$\text{ou :} \quad \sum_{k=0}^{n} [(k+2)\,(k+1)\,\lambda_{k+2} + (n(n+2) - k(k+2))\,\lambda_k]\, x^k = 0.$$

Il en résulte qu'on a pour tout entier naturel k :

$$\lambda_{k+2} = -\frac{n\,(n+2) - k\,(k+2)}{(k+2)\,(k+1)}\,\lambda_k = -\frac{(n-k)\,(n+k+2)}{(k+2)\,(k+1)}\,\lambda_k.$$

On retrouve le fait que $\lambda_{n+2} = 0$, puis $\lambda_{n+2\,j} = 0$ pour tout entier $j \ge 1$.

Vérifions maintenant par récurrence la formule proposée : $\lambda_{n-2\,j} = \frac{(-1)^j}{2^{2\,j}} \binom{n-j}{j} \lambda_n$.

Elle est vraie pour $j = 0$, et si on la suppose vraie au rang j, on a si $0 \le n - 2\,j - 2 \le n$

$$\lambda_{n-2\,j-2} = -\frac{(n-2\,j)\,(n-2\,j-1)}{(2\,j+2)\,(2\,n-2\,j)}\,\lambda_{n-2\,j} = -\frac{(n-2\,j)\,(n-2\,j-1)}{4\,(j+1)\,(n-j)}\,\lambda_{n-2\,j}$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2\,j+2}}\,\frac{(n-2\,j)\,(n-2\,j-1)}{(j+1)\,(n-j)}\,\frac{(n-j)\,!}{j\,!\,(n-2\,j)\,!}\,\lambda_n$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2\,j+2}}\,\frac{(n-j-1)\,!}{(j+1)\,!\,(n-2\,j-2)\,!}\,\lambda_n = \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2\,j+2}} \binom{n-j-1}{j+1} \lambda_n.$$

La formule est démontrée, et comme le coefficient dominant λ_n de U_n est 2^n, on en déduit $\lambda_{n-2\,j}$.

c) Comme U_n est de la parité de n, les coefficients $\lambda_{n-2\,j-1}$ sont évidemment nuls et on a donc :

$$U_n(X) = \sum_{0 \le 2\,j \le n} (-1)^j\, 2^{n-2\,j} \binom{n-j}{j} X^{n-2\,j}.$$
