Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2021

Corrigé de l'épreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

1°) *Question préliminaire : rappels sur les projecteurs*

a) L'endomorphisme $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $(\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - p$, et donc si et seulement si : $\mathrm{Id} - 2\,p + p^2 = \mathrm{Id} - p$, ou si et seulement si : $p^2 = p$, donc si et seulement si p est un projecteur.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$ par double inclusion :
- Si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, alors $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \subset \mathrm{Im}(p)$.
- Si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $v \in E$ tel que $x = p(v)$; on a donc $(\mathrm{Id} - p)\,(x) = p(v) - p^2(v) = 0$.
  Donc $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, d'où $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$.

Et en appliquant cette relation à $\mathrm{Id} - p$ qui est aussi un projecteur, on a donc : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.

c) Pour tout $x \in E$, on a : $x = p(x) + (\mathrm{Id} - p)\,(x)$ où $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $(\mathrm{Id} - p)\,(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}(p)$.
Ceci prouve que $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.
Et pour $x \in \mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \bigcap \mathrm{Ker}(p)$, on a $x = p(x)$ et $p(x) = 0$, donc $x = 0$.
Ceci prouve que $\mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$, et donc : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

d) Comme $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on obtient une base de E par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
Pour $x \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, on a $p(x) = x$, et pour $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $p(x) = 0$.
La matrice de p dans la base obtenue par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ est donc :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

où $r = \mathrm{rg}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p))$.
Il en résulte qu'un projecteur est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont 1 à l'ordre r et 0 à l'ordre $\dim(E) - r = d - r$.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Un simple produit matriciel montre qu'on a $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ avec les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que les endomorphismes p et q sont des projecteurs.

b1) On sait que les vecteurs-colonnes de P engendrent Im(p) :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\right).$$

En effet, les 2 premiers vecteurs-colonnes sont indépendants et le troisième en est combinaison linéaire (c'est l'opposé de la somme des deux premiers).
Im(p) est donc un plan vectoriel, dont on voit qu'une équation est : $x + y + z = 0$.

Le noyau de p est l'ensemble des vecteurs de composantes x, y, z vérifiant :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \left| \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

Ici encore, on peut supprimer la troisième équation qui est combinaison linéaire des 2 autres.
Ker(p) est donc l'intersection de deux plans, c'est donc une droite, dont un rapide calcul montre qu'elle est dirigée par le vecteur u de composantes (1, 1, 1).
Ainsi, p est la projection sur Im(p) : $x + y + z = 0$ dans la direction Ker(p) = Vect(u). Ajoutons que si l'on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle, on observe que Im(p) est orthogonal à Ker(p), et p est la projection orthogonale sur le plan Im(p) : $x + y + z = 0$.

b2) On sait que les vecteurs-colonnes de Q engendrent Im(q) :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} \\ -\frac{2}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right).$$

Im(q) est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur directeur v de composantes (1, −2, 1).

Le noyau de q est l'ensemble des vecteurs de composantes x, y, z vérifiant :

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad x - 2y + z = 0.$$

En effet, les 3 équations du système sont ici proportionnelles.
Im(q) est donc un plan vectoriel, dont une équation est : $x - 2y + z = 0$.
Ainsi, q est la projection sur Im(q) = Vect(v) dans la direction Ker(q) : $x - 2y + z = 0$. Ajoutons que si l'on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle, on observe que Im(q) est orthogonal à Ker(q), et q est la projection orthogonale sur la droite Vect(v) où v a pour composantes (1, −2, 1).

c) Deux produits matriciels montrent qu'on a $PQ = QP$ avec :

$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = QP.$$

3°) *Etude de l'endomorphisme $p+q$*

a) La matrice $P+Q$ de l'endomorphisme $p+q$ et son polynôme caractéristique sont :

$$P+Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{4}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(X\,\mathrm{Id}-(P+Q)) = \begin{vmatrix} X-\frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} & X-\frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & X-\frac{5}{6} \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant, il vient :

$$\det(X\,\mathrm{Id}-(P+Q)) = X^3-3\,X^2+2\,X = X(X-1)\,(X-2).$$

b) L'endomorphisme $p+q$ a donc pour valeurs propres 0, 1 et 2.

Comme $p+q$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant 3 valeurs propres distinctes, il est diagonalisable.

c) Un vecteur propre v_0 de $p+q$ vérifie $(p+q)\,(v_0)=0$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} 5\,x-4\,y-z=0 \\ x-2\,y+z=0 \\ x+4\,y-5\,z=0 \end{array}\right.$$

L'une de ces trois équations est évidemment inutile, et en résolvant les deux autres, on voit que $\mathrm{Ker}(p+q)$ est la droite dirigée par le vecteur v_0 de composantes $(1,\ 1,\ 1)$.

- Un vecteur propre v_1 de $p+q$ vérifie $(p+q)\,(v_1)=v_1$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} x+4\,y+z=0 \\ 2\,x-y+2\,z=0 \\ x+4\,y+z=0 \end{array}\right.$$

De même, $\mathrm{Ker}(p+q-\mathrm{Id})$ est la droite dirigée par le vecteur v_1 de composantes $(1,\ 0,\ -1)$.

- Un vecteur propre v_2 de $p+q$ vérifie $(p+q)\,(v_2)=2\,v_2$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} 7\,x+4\,y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+4\,y+7\,z=0 \end{array}\right.$$

De même, $\mathrm{Ker}(p+q-\mathrm{Id})$ est la droite dirigée par le vecteur v_2 de composantes $(1,\ -2,\ 1)$.

d) La matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres $(v_0,\ v_1,\ v_2)$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^{-1}(P+Q)\,R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que : $P\,v_0=0,\ P\,v_1=v_1,\ P\,v_2=v_2$ et : $Q\,v_0=0,\ Q\,v_1=0,\ Q\,v_2=v_2$.

On en déduit les matrices des endomorphismes p et q dans la base $(v_0,\ v_1,\ v_2)$:

$$R^{-1}\,P\,R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^{-1}\,Q\,R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve par somme que : $R^{-1}\,P\,R+R^{-1}\,Q\,R=R^{-1}(P+Q)\,R=\mathrm{Diag}(0,\ 1,\ 2)$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

4°) *Etude des valeurs propres de* $f = p + q$

a) Comme $f = p + q$ et comme $p \circ q = q \circ p$, on a : $f^2 = (p+q)^2 = p + q + 2\, p \circ q = f + 2\, p \circ q$.
De même, on a : $f^3 = (p+q)^3 = p + q + 6\, p \circ q = f + 6\, p \circ q$.
Il en résulte que : $f^3 - 3\, f^2 + 2\, f = 0$.

b) Si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, on a : $f(x) = \lambda\, x$.
On en déduit que : $f^2(x) = f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x) = \lambda^2\, x$ et $f^3(x) = f\left(\lambda^2\, x\right) = \lambda^2\, f(x) = \lambda^3\, x$.
Comme on a : $f^3(x) - 3\, f^2(x) + 2\, f(x) = 0$, il en résulte que : $\left(\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 2\,\lambda\right) x = 0$.
Comme x est un vecteur propre, il est non nul et on a donc : $\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 2\,\lambda = \lambda(\lambda - 1)\,(\lambda - 2) = 0$.
Ainsi, les valeurs propres possibles de $p + q$ sont au plus 0, 1, 2.

5°) *Etude des sous-espaces propres de* $f = p + q$

a) Démontrons par double inclusion l'égalité : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$:
- si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, alors $p(x) = q(x) = 0$, donc $(p+q)\,(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$.
- si $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, on a $p(x) + q(x) = 0$, puis en composant par p, on obtient : $p(x) + p \circ q(x) = 0$, puis en composant par q, on a : $q \circ p(x) + q(x) = 0$. Comme $p \circ q = q \circ p$, on a : $p(x) = q(x)$ et comme $p(x) + q(x) = 0$, il vient : $p(x) = q(x) = 0$, donc : $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

En remplaçant les deux projecteurs p et q par les deux projecteurs $\mathrm{Id} - p$ et $\mathrm{Id} - q$, on obtient :
$$\mathrm{Ker}((\mathrm{Id} - p) + (\mathrm{Id} - q)) = \mathrm{Ker}(p + q - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$

b) Le réel 0 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p+q)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc si et seulement si : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0\}$.
Le sous-espace propre de f associé à 0 est alors : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Et 2 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p + q - 2\,\mathrm{Id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$l, donc si et seulement si : $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(p + q - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0\}$.
Le sous-espace propre de f associé à 2 est alors : $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

c) Montrons l'inclusion : $\mathrm{Im}\left(2\, f - f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$.
Si $y = \left(2\, f - f^2\right)(x) \in \mathrm{Im}\left(2\, f - f^2\right)$, on a, compte tenu de la relation $f^3 - 3\, f^2 + 2\, f = 0$:
$$(\mathrm{Id} - f)\,(y) = (\mathrm{Id} - f) \circ \left(2\, f - f^2\right)(x) = \left(f^3 - 3\, f^2 + 2\, f\right)(x) = 0.$$
Il en résulte que $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$, ce qui établit l'inclusion voulue.
Réciproquement, comme on a : $x = (\mathrm{Id} - f)^2\,(x) + \left(2\, f - f^2\right)(x)$ pour tout vecteur $x \in E$, on en tire que si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$, alors $x = \left(2\, f - f^2\right)(x) \in \mathrm{Im}\left(2\, f - f^2\right)$, d'où : $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f) \subset \mathrm{Im}\left(2\, f - f^2\right)$.
On en déduit que : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Im}\left(2\, f - f^2\right)$.
Et en remplaçant $f = p + q$, on a : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\left(2\, f - f^2\right) = \mathrm{Im}(p + q - 2\, p \circ q)$.

d) On remarque que : $(\mathrm{Id} - 2\, p)^2 = \mathrm{Id} - 4\, p + 4\, p^2 = \mathrm{Id}$, donc $\mathrm{Id} - 2\, p$ est inversible.
On a d'autre part : $(\mathrm{Id} - 2\, p) \circ (p + q - 2\, p \circ q) = -p + q$.
Le réel 1 est ainsi valeur propre de $p + q$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p + q - 2\, p \circ q) \neq \{0\}$, donc si et seulement si : $p + q - 2\, p \circ q \neq 0$, ou encore, puisque $\mathrm{Id} - 2\, p$ est inversible, si et seulement si : $(\mathrm{Id} - 2\, p) \circ (p + q - 2\, p \circ q) = -p + q \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $p \neq q$.

6°) *Réduction de l'endomorphisme* $f = p + q$

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2\,x_2$.

On a donc : $f(x) = x_1 + 2\,x_2$ et $f^2(x) = x_1 + 4\,x_2$.

On en déduit que : $x_2 = \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right)$, $x_1 = 2\,f(x) - f^2(x)$, et $x_0 = \frac{1}{2}\left(2\,x - 3\,f(x) + f^2(x)\right)$.

b) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

D'après ce qui précède, on arrive nécessairement aux formules ci-dessus.

Ainsi, l'écriture $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est unique et la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est donc directe.

- Considérons maintenant un vecteur $x \in E$ et définissons x_0, x_1, x_2 par les formules ci-dessus.

On a bien $x_0 + x_1 + x_2 = x$ et on a de plus, compte tenu de la relation $f^3 - 3\,f^2 + 2\,f = 0$:

$x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ car : $f(x_0) = \frac{1}{2}\left(2\,f(x) - 3\,f^2(x) + f^3(x)\right) = 0$.

$x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ car : $(f - \mathrm{Id})\,(x_1) = -\frac{1}{2}\left(f^3(x) - 3\,f^2(x) + 2\,f(x)\right) = 0$.

$x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ car : $(f - 2\,\mathrm{Id})\,(x_2) = \frac{1}{2}\left(f^3(x) - 3\,f^2(x) + 2\,f(x)\right) = 0$.

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

Ainsi, E est égal à la somme directe $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et on a :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$$

$$\text{avec : } \quad x = \frac{1}{2}\left(2\,x - 3\,f(x) + f^2(x)\right) + \left(2\,f(x) - f^2(x)\right) + \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right).$$

c) Les sous-espaces propres possibles de $f = p + q$ sont au plus $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ (et ces sous-espaces sont réduits à $\{0\}$ s'il ne s'agit pas de sous-espaces propres).
Or ces sous-espaces sont supplémentaires dans E comme on vient de l'établir.
Donc l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et les projecteurs associant à un vecteur $x \in E$ ses projections sur $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont, comme on vient de l'établir :

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\left(2\,\mathrm{Id} - 3\,f + f^2\right), \quad \pi_1 = 2\,f - f^2 \quad , \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\left(f^2 - f\right).$$

Si certains des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ ne sont pas sous-espaces propres, c'est à dire sont réduits au vecteur nul, alors les projecteurs correspondants π_0, π_1, π_2 sont nuls.

■ PARTIE II : SOMME DE *n* PROJECTEURS QUI COMMUTENT

7°) *Co-diagonalisation de* $p_1, p_2, \dots, p_n$

a) Montrons que $\mathrm{Im}(p_n)$ est stable par p_k pour $1 \le k \le n$.

Soit $y = p_n(x) \in \mathrm{Im}(p_n)$; alors $p_k(y) = p_k \circ p_n(x) = p_n \circ p_k(x) \in \mathrm{Im}(p_n)$ car $p_k$et p_n commutent.

- Montrons que $\mathrm{Ker}(p_n)$ est stable par p_k pour $1 \le k \le n$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_n)$; alors $p_n \circ p_k(x) = p_k \circ p_n(x) = 0$, donc $p_k(x) \in \mathrm{Ker}(p_n)$.

On peut donc considérer les endomorphismes induits par les projecteurs p_k sur les sous-espaces $\mathrm{Im}(p_n)$ et $\mathrm{Ker}(p_n)$, et ces endomorphismes induits sont clairement des projecteurs aussi.

b) Considérons l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante :
"Si n projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie commutent deux à deux, alors il existe une base de cet espace dans laquelle leurs n matrices sont diagonales."
Notons que $\mathcal{H}_1$ est trivialement vraie d'après la question préliminaire.
Supposons alors que $\mathcal{H}_{n-1}$ soit vérifiée pour un entier $n \geq 2$:

- Si p_n est le projecteur nul ($p_n = 0$) ou le projecteur identité ($p_n = \mathrm{Id}$), alors $\mathcal{H}_n$ est vérifiée car la matrice de p_n étant diagonale dans toutes les bases de E, il suffit de co-diagonaliser dans l'une d'elles $p_1, \ldots, p_{n-1}$ à l'aide de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_{n-1}$ pour obtenir le résultat.
- Sinon, $\mathrm{Im}(p_n)$ et $\mathrm{Ker}(p_n)$ ne sont pas réduits au vecteur nul et :

- les endomorphismes induits par $p_1, \ldots, p_{n-1}$ sur $\mathrm{Im}(p_n)$ constituent $n-1$ projecteurs de $\mathrm{Im}(p_n)$ qui commutent deux à deux, et d'après $\mathcal{H}_{n-1}$, il existe donc une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(p_n)$ dans laquelle leurs matrices $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont diagonales, avec des 0 et/ou des 1 sur leurs diagonales (cf 1°).
- les endomorphismes induits par $p_1, \ldots, p_{n-1}$ sur $\mathrm{Ker}(p_n)$ constituent $n-1$ projecteurs de $\mathrm{Ker}(p_n)$ qui commutent deux à deux, et d'après $\mathcal{H}_{n-1}$, il existe donc une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(p_n)$ dans laquelle leurs matrices $B_1, \ldots, B_{n-1}$ sont diagonales, avec des 0 et/ou des 1 sur leurs diagonales (cf 1°).

c) Comme $\mathrm{Im}(p_n) \oplus \mathrm{Ker}(p_n) = E$, on obtient une base de E par réunion des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Si A_k et B_k désignent comme ci-dessus les matrices diagonales des endomorphismes induits par p_k (pour $1 \leq k \leq n-1$) sur $\mathrm{Im}(p_n)$ et $\mathrm{Ker}(p_n)$ rapportés à leurs bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors la matrice P_k de l'endomorphisme p_k dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ s'écrit comme suit, et est diagonale avec des 0 et/ou 1 :

$$P_k = \left(\begin{array}{c|c} A_k & O \\ \hline O & B_k \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{(k)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_d^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{avec : } \forall\, i \in [\![1, d]\!],\ \varepsilon_i^{(k)} = 0 \text{ ou } 1.$$

Et la matrice de p_n est la suivante, comme on l'a vu dans la question préliminaire avec $r_n = \mathrm{rg}(p_n)$:

$$P_n = \left(\begin{array}{c|c} I_{r_n} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Ainsi, on a obtenu une base de E dans laquelle les matrices de $p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$ sont diagonales.
L'hypothèse $\mathcal{H}_n$ est donc établie par récurrence.

8°) *Etude des valeurs propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$
a) D'après ci-dessus, la matrice $F_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ de l'endomorphisme $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2$ de E est diagonale, et sur sa diagonale figurent des sommes de n réels égaux à 0 ou 1 venant des matrices $P_1, P_2, \ldots, P_n$, donc des entiers compris entre 0 et n au sens large.

b) On en déduit aussitôt que $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ est diagonalisable, et que ses valeurs propres possibles sont $0, 1, 2, \ldots, n$. Et comme l'endomorphisme f_n est diagonalisable, l'espace E est donc somme directe de ses sous-espaces-propres, ce qui donne (avec des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$ qui sont réduits à $\{0\}$ et peuvent être ôtés de la somme si k n'est pas valeur propre de f_n) :

$$E = \mathrm{Ker}(f_n) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f_n - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(f_n - n\,\mathrm{Id}).$$

c) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ les éléments diagonaux de F_n, qui sont donc les valeurs propres de f_n.
La matrice de $f_n \circ (f_n - \mathrm{Id}) \circ (f_n - 2\,\mathrm{Id}) \circ \ \ldots\ \circ (f_n - n\,\mathrm{Id})$ est $F_n\,(F_n - I_d)\,(F_n - 2\,I_d)\ \ldots (F_n - n\,I_d)$, et comme c'est un produit de matrices diagonales, on trouve sur la diagonale de la matrice produit le produit des éléments diagonaux des matrices F_n, $(F_n - I_d)$, $(F_n - 2\,I_d)$, $\ldots$, $(F_n - n\,I_d)$, soit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1-1)(\lambda_1-2)\ldots(\lambda_1-n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2-1)(\lambda_2-2)\ldots(\lambda_2-n) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d(\lambda_d-1)(\lambda_d-2)\ldots(\lambda_d-n) \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ de F_n sont au plus $0, 1, 2, \ldots, n$, elles sont donc racines du polynôme $X(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$, et tous les termes diagonaux de la matrice ci-dessus sont donc nuls, ce qui implique : $F_n\,(F_n - I_d)\,(F_n - 2\,I_d)\ \ldots (F_n - n\,I_d) = 0$.
Il en résulte que : $f_n \circ (f_n - \mathrm{Id}) \circ (f_n - 2\,\mathrm{Id}) \circ\ \ldots\ \circ (f_n - n\,\mathrm{Id}) = 0$.

9°) *Etude de certains sous-espaces propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$
a) Comme $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$ sont des projecteurs qui commutent, on a :

- $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} \circ p_{i_1} = p_{i_1}^2 \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} = p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}$.
- $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} \circ p_{i_2} = p_{i_1} \circ p_{i_2}^2 \circ \ldots \circ p_{i_k} = p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}$.
- ....
- $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} \circ p_{i_k} = p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}^2 = p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}$.

Par addition, il en résulte que : $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k} \circ \left(p_{i_1} + p_{i_2} + \ \ldots\ + p_{i_k}\right) = k\, p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}$.

b) On a donc : $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n \circ (p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n) = n\, p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$.
Supposons que : $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n)\,(x) = 0$, et composons à gauche par $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$.
On obtient : $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n \circ (p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n)\,(x) = 0$, donc : $n\, p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n(x) = 0$.
Ainsi, si $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, on a : $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n(x) = 0$.

c) On considère un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$, donc vérifiant $f_n(x) = (p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n)\,(x) = 0$.
Soit l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_k$: pour toute partie à k éléments $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ de $[\![1, n]\!]$ ayant k éléments distincts, on a : $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_k}(x) = 0$.
L'hypothèse $\mathcal{H}_n$ est vérifiée, et nous supposons $\mathcal{H}_k$ vérifiée pour un entier $k \in [\![2, n]\!]$.
Considérons maintenant une partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$ à $k-1$ éléments de $[\![1, n]\!]$.
Calculons $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x)$ à l'aide de $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}} \circ (p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n)\,(x)$.
Si $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$, remarquons qu'on a : $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}} \circ p_j(x) = 0$ d'après $\mathcal{H}_k$ puisque $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, j\}$ est une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$. On a donc :

$$p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}} \circ (p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n)\,(x) = p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}} \circ \left(p_{i_1} + p_{i_2} + \ \ldots\ + p_{i_{k-1}}\right)(x).$$

D'après la question a) ci-dessus, on a maintenant :

$$p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}} \circ \left(p_{i_1} + p_{i_2} + \ \ldots\ + p_{i_{k-1}}\right)(x) = (k-1)\, p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) = 0.$$

Ainsi, pour toute partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}\}$ à $k-1$ éléments de $[\![1, n]\!]$: $p_{i_1} \circ p_{i_2} \circ \ldots \circ p_{i_{k-1}}(x) = 0$.
L'hypothèse $\mathcal{H}_{k-1}$ est donc établie, ce qui valide la récurrence.
En particulier, l'hypothèse $\mathcal{H}_1$ est vraie et donne : $p_1(x) = p_2(x) = \ \ldots\ = p_n(x) = 0$.

d) Montrons par double inclusion : $\mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$.

- Si $x \in \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$, on a : $p_1(x) = p_2(x) = \ldots = p_n(x) = 0$.
  Il en résulte que : $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$.
- Si $x \in \mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$, on a : $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(x) = 0$.
  D'après c), il vient : $p_1(x) = p_2(x) = \ldots = p_n(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$.

Remplaçons maintenant les projecteurs $p_1, \ldots, p_n$ par les projecteurs $\mathrm{Id} - p_1, \ldots, \mathrm{Id} - p_n$.
Compte tenu de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p_k) = \mathrm{Im}(p_k)$ et de $\mathrm{Ker}(-f) = \mathrm{Ker}(f)$, il vient donc :

$$\mathrm{Ker}((\mathrm{Id} - p_1) + (\mathrm{Id} - p_2) + \ldots + (\mathrm{Id} - p_n)) = \mathrm{Ker}((\mathrm{Id} - p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p_n)$$

$$\text{ou : } \mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n - n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p_1) \bigcap \mathrm{Im}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Im}(p_n).$$

e) L'égalité $\mathrm{Ker}(f_n) = \mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$ démontre que 0 est valeur propre de f_n si et seulement si $\mathrm{Ker}(f_n) = \mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(p_n) \neq \{0\}$.
Et le sous-espace propre de f_n associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Ker}(p_1) \bigcap \mathrm{Ker}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Ker}(p_n)$.

L'égalité $\mathrm{Ker}(f_n - n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(p_1 + p_2 + \ldots + p_n - n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p_1) \bigcap \mathrm{Im}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Im}(p_n)$ montre que n est valeur propre de f_n si et seulement si $\mathrm{Ker}(f_n - n\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p_1) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Im}(p_n) \neq \{0\}$.
Et le sous-espace propre de f_n associé à la valeur propre n est $\mathrm{Im}(p_1) \bigcap \mathrm{Im}(p_2) \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Im}(p_n)$.

10°) *Etude des projecteurs sur les sous-espaces propres de* $f_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

a) Pour $0 \leq k \leq n$, le polynôme L_k vérifie : $\forall\, i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\} : L_k(i) = 0$ si et seulement si :

$$\exists\, Q_k \in \mathbb{R}[X] : L_k(X) = X(X-1) \ldots (X-k+1)(X-k-1) \ldots (X-n)\, Q_k(X).$$

Comme L_k est de degré n, le polynôme Q_k est nécessairement de degré 0, et c'est une constante q_k
Enfin, la condition $L_k(k) = 1$ est réalisée si et seulement si : $(-1)^{n-k}\, k!\,(n-k)!\, q_k = 1$, d'où :

$$L_k(X) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} X(X-1) \ldots (X-k+1)(X-k-1) \ldots (X-n).$$

b) Le polynôme $L_0 + L_1 + \ldots + L_n - 1$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et s'annule aux $n+1$ points $0, 1, 2, \ldots, n$.
C'est donc le polynôme nul, de sorte qu'on a : $L_0 + L_1 + \ldots + L_n = 1$.
On en déduit que : $(L_0 + L_1 + \ldots + L_n)(f_n) = \mathrm{Id}$, donc que : $L_0(f_n) + L_1(f_n) + \ldots + L_n(f_n) = \mathrm{Id}$.

c) Montrons, pour $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in E$, que : $L_k(f_n)(x) \in \mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$:

$$(f_n - k\,\mathrm{Id}) \circ L_k(f_n)(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} f_n \circ (f_n - \mathrm{Id}) \circ (f_n - 2\,\mathrm{Id}) \circ \ldots \circ (f_n - n\,\mathrm{Id})(x) = 0$$

puisqu'on a établi à la question 8 que : $f_n \circ (f_n - \mathrm{Id}) \circ (f_n - 2\,\mathrm{Id}) \circ \ldots \circ (f_n - n\,\mathrm{Id}) = 0$.

d) Les résultats précédents démontrent qu'on a pour tout vecteur x de E :

$$x = \sum_{k=0}^{n} L_k(f_n)(x) \quad \text{avec} \quad \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ L_k(f_n)(x) \in \mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id}).$$

L'égalité ci-dessus donne donc l'unique décomposition d'un vecteur $x \in E$ sur la somme directe des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$, qui sont soit des sous-espaces propres de f_n, soit des sous-espaces réduits au vecteur nul, qu'on peut donc ôter de la somme (et dans ce dernier cas, on a : $L_k(f_n) = 0$).
Ainsi, si $k \in [\![0, n]\!]$ est valeur propre de f_n, alors $L_k(f_n)$ est le projecteur sur le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f_n - k\,\mathrm{Id})$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres de f_n.
