Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2021

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques PT - TSI (3h)

■ PROBLÈME I : PARABOLE ET CISSOÏDE DROITE

- 1°) Etude d'une première courbe paramétrée
- a) La projection orthogonale du point P(t) de coordonnées (t, f(t)) sur la droite horizontale \mathcal{D} d'équation $y = -\frac{p}{2}$ est évidemment le point H(t) de coordonnées $\left(t, -\frac{p}{2}\right)$.

La distance du point P(t) à la directrice \mathcal{D} est donc $P(t)H(t) = \left| f(t) + \frac{p}{2} \right|$.

La distance du point P(t) au foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ est $P(t) F = \sqrt{t^2 + \left(f(t) - \frac{p}{2}\right)^2}$.

Pour tout réel t, le point P(t) est donc équidistant de la droite \mathcal{D} et du point F si et seulement si :

$$\left(f(t) + \frac{p}{2}\right)^2 = t^2 + \left(f(t) - \frac{p}{2}\right)^2 \iff f(t) = \frac{t^2}{2p}.$$

- b) La courbe représentative de l'application $t\mapsto M(t)\left(t,\frac{t^2}{2\,p}\right)$ est la parabole d'équation $y=\frac{x^2}{2\,p}$.
- c) La tangente à \mathcal{P} au point P(t) est dirigée par le vecteur dérivé $\frac{\overline{dP}}{dt}(t)$ de composantes $\left(1, \frac{t}{p}\right)$. On obtient une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe \mathcal{P} au point P(t) en écrivant qu'un point M appartient à celle-ci si et et seulement si les vecteurs $\overline{P(t)M}$ et $\frac{\overline{dP}}{dt}(t)$ sont liés, c'est à dire :

$$\det\left(\overrightarrow{P(t)M}, \ \overrightarrow{\frac{dP}{dt}}(t)\right) = \begin{vmatrix} x-t & 1\\ y - \frac{t^2}{2p} & \frac{t}{p} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on voit qu'une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ est donc : $tx - py - \frac{t^2}{2} = 0$.

- d) Le triangle de sommets P(t), F, H(t) est isocèle en P(t) car ce point est équidistant de \mathcal{D} et F, ce qui s'exprime par P(t) H(t) = P(t) F. Le milieu I(t) du côté F H(t) a pour coordonnées $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$. Les coordonnées de I(t) étant $\left(\frac{t}{2}, 0\right)$, il est clair que I(t) décrit l'axe Ox lorsque t décrit \mathbb{R} .
- e) La tangente en P(t) à la courbe \mathcal{P} passe par I(t) puisque $t \, x p \, y \frac{t^2}{2} = 0$ avec $x = \frac{t}{2}$ et y = 0. Ainsi cette tangente est la médiane issue de P(t) du triangle isocèle de sommets P(t), F, H(t), et c'est donc aussi sa hauteur issue de P(t) et la médiatrice du côté F(t).
- f) Un point M appartient à la normale passant par O à la tangente à \mathcal{P} en P(t) si et seulement si : \overrightarrow{OM} . $\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(t) = 0$. Elle a donc pour équation : px + ty = 0.

La projection du point O sur la tangente à la courbe C au point P(t) est l'intersection de la tangente à la courbe C en P(t) et de la normale passant par O à cette même tangente, ce qui donne :

$$x(t) = \frac{t^3}{2(t^2 + p^2)}$$
 ; $y(t) = \frac{-pt^2}{2(t^2 + p^2)}$.

- 2°) Etude de la podaire de \mathcal{P} par rapport à son sommet O.
- a) Un rapide calcul des dérivées des fonctions précédentes donne :

$$x'(t) = \frac{t^2(t^2 + 3 p^2)}{2(t^2 + p^2)^2} \qquad ; \qquad y'(t) = \frac{-p^3 t}{(t^2 + p^2)^2}.$$

b) Comme les fonctions x et y sont respectivement impaire et paire, on ne fait l'étude que sur \mathbb{R}_+ . Comme $x'(t) \ge 0$, la fonction x croit de 0 à $+\infty$.

Comme $y'(t) \le 0$, la fonction y décroît de 0 à $-\frac{p}{2}$.

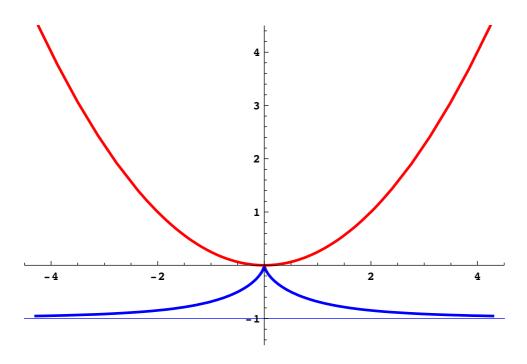
Ainsi, on a une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{p}{2}$, qui n'est autre que la droite \mathcal{D} .

Pour t > 0, la tangente en M(t) a pour pente : $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{2 p^3}{t(t^2 + 3 p^2)} < 0$.

Etudions maintenant la tangente en M(0). La pente de la droite M(0) M(t) = OM(t) est $\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{p}{t}$.

Lorsque t tend vers 0, la position-limite de cette droite est donc verticale, et c'est l'axe Oy. La tangente en M(0) = O à la courbe est donc l'axe des ordonnées Oy.

c) On en tire le tracé de la courbe C, ensemble des projections de l'origine O sur les tangentes à \mathcal{P} . Pour p = 2 (où le foyer F a pour coordonnées (0, 1) et la directrice \mathcal{D} a pour équation y = -1), voici la parabole \mathcal{P} et la cissoïde C:



■ PROBLÈME II : SOMME DE DEUX PROJECTEURS QUI COMMUTENT

- 1°) Question préliminaire : rappels sur les projecteurs
- a) L'endomorphisme $\operatorname{Id} p$ est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $(\operatorname{Id} p)^2 = \operatorname{Id} p$, et donc si et seulement si : $\operatorname{Id} 2p + p^2 = \operatorname{Id} p$, ou si et seulement si : $p^2 = p$, donc si et seulement si p est un projecteur.
- b) Montrer que Ker(Id p) = Im(p) par double inclusion :
- Si $x \in \text{Ker}(\text{Id} p)$, alors $x = p(x) \in \text{Im}(p)$, d'où $\text{Ker}(\text{Id} p) \subset \text{Im}(p)$.
- Si $x \in \text{Im}(p)$, il existe $v \in E$ tel que x = p(v); on a donc $(\text{Id} p)(x) = p(v) p^2(v) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}(\text{Id} - p)$, d'où $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(\text{Id} - p)$.

Et en appliquant cette relation à Id - p qui est aussi un projecteur, on a donc : Ker(p) = Im(Id - p).

c) Pour tout $x \in E$, on a : $x = p(x) + (\operatorname{Id} - p)(x)$ où $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $(\operatorname{Id} - p)(x) \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - p) = \operatorname{Ker}(p)$. Ceci prouve que $E = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Ker}(p)$.

Et pour $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p) \cap \text{Ker}(p)$, on a x = p(x) et p(x) = 0, donc x = 0. Ceci prouve que $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$, et donc : $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

d) Comme $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, on obtient une base de E par réunion de bases de Im(p) et Ker(p). Pour $x \in \text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$, on a p(x) = x, et pour $x \in \text{Ker}(p)$, on a p(x) = 0.

La matrice de p dans la base obtenue par réunion de bases de Im(p) et Ker(p) est donc :

$$P = \left(\frac{I_r \mid O}{O \mid O}\right)$$

où r = rg(p) = dim(Im(p)).

Il en résulte qu'un projecteur est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont 1 à l'ordre r et 0 à l'ordre $\dim(E) - r = d - r$.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS ℝ³

- 2°) Nature des endomorphismes p et q
- a) Un simple produit matriciel montre qu'on a $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ avec les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que les endomorphismes p et q sont des projecteurs.

b1) On sait que les vecteurs-colonnes de P engendrent Im(p):

$$Im(p) = Vect \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

En effet, les 2 premiers vecteurs-colonnes sont indépendants et le troisième en est combinaison linéaire (c'est l'opposé de la somme des deux premiers).

Im(p) est donc un plan vectoriel, dont on voit qu'une équation est : x + y + z = 0.

Le noyau de p est l'ensemble des vecteurs de composantes x, y, z vérifiant :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{vmatrix}$$

Ici encore, on peut supprimer la troisième équation qui est combinaison linéaire des 2 autres. Ker(p) est donc l'intersection de deux plans, c'est donc une droite, dont un rapide calcul montre qu'elle est dirigée par le vecteur u de composantes (1, 1, 1).

Ainsi, p est la projection sur Im(p): x + y + z = 0 dans la direction Ker(p) = Vect(u). Ajoutons que si l'on munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne usuelle, on observe que Im(p) est orthogonal à Ker(p), et p est la projection orthogonale sur le plan Im(p): x + y + z = 0.

b2) On sait que les vecteurs-colonnes de Q engendrent Im(q):

$$\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} \\ -\frac{2}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right).$$

Im(q) est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur directeur v de composantes (1, -2, 1).

Le noyau de q est l'ensemble des vecteurs de composantes x, y, z vérifiant :

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad x - 2y + z = 0.$$

En effet, les 3 équations du système sont ici proportionnelles.

Im(q) est donc un plan vectoriel, dont une équation est : x - 2y + z = 0.

Ainsi, q est la projection sur Im(q) = Vect(v) dans la direction Ker(q) : x - 2y + z = 0. Ajoutons que si l'on munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne usuelle, on observe que Im(q) est orthogonal à Ker(q), et q est la projection orthogonale sur la droite Vect(v) où v a pour composantes (1, -2, 1).

c) Deux produits matriciels montrent qu'on a PQ = QP avec

$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = QP.$$

- 3°) Etude de l'endomorphisme p+q
- a) La matrice P + Q de l'endomorphisme p + q et son polynôme caractéristique sont :

$$P + Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{4}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} ; det(X \operatorname{Id} - (P + Q)) = \begin{pmatrix} X - \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} & X - \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & X - \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

En développant ce déterminant, il vient

$$\det(X \operatorname{Id} - (P + Q)) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2).$$

b) L'endomorphisme p + q a donc pour valeurs propres 0, 1 et 2.

Comme p + q est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 ayant 3 valeurs propres distinctes, il est diagonalisable.

c) Un vecteur propre v_0 de p + q vérifie $(p + q)(v_0) = 0$, soit

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 5x - 4y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \end{vmatrix}$$

L'une de ces trois équations est évidemment inutile, et en résolvant les deux autres, on voit que Ker(p+q) est la droite dirigée par le vecteur v_0 de composantes (1, 1, 1).

- Un vecteur propre v_1 de p + q vérifie $(p + q)(v_1) = v_1$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x+4y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+4y+z=0 \end{vmatrix}$$

De même, Ker(p+q-Id) est la droite dirigée par le vecteur v_1 de composantes (1, 0, -1).

- Un vecteur propre v_2 de p + q vérifie $(p + q)(v_2) = 2v_2$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 7x+4y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+4y+7z=0 \end{vmatrix}$$

De même, Ker(p+q-Id) est la droite dirigée par le vecteur v_2 de composantes (1, -2, 1).

d) La matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (v_0, v_1, v_2) s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^{-1}(P+Q) R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que : $Pv_0 = 0$, $Pv_1 = v_1$, $Pv_2 = v_2$ et : $Qv_0 = 0$, $Qv_1 = 0$, $Qv_2 = v_2$. On en déduit les matrices des endomorphismes p et q dans la base (v_0, v_1, v_2) :

$$R^{-1} P R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^{-1} Q R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve par somme que : $R^{-1} P R + R^{-1} Q R = R^{-1} (P + Q) R = Diag(0, 1, 2)$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

- 4°) Etude des valeurs propres de f = p + q
- a) Comme f = p + q et comme $p \circ q = q \circ p$, on a : $f^2 = (p + q)^2 = p + q + 2 p \circ q = f + 2 p \circ q$. De même, on a : $f^3 = (p + q)^3 = p + q + 6 p \circ q = f + 6 p \circ q$.

Il en résulte que : $f^3 - 3 f^2 + 2 f = 0$.

b) Si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ , on a : $f(x) = \lambda x$.

On en déduit que :
$$f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$
 et $f^3(x) = f(\lambda^2 x) = \lambda^2 f(x) = \lambda^3 x$.

Comme on a :
$$f^3(x) - 3 f^2(x) + 2 f(x) = 0$$
, il en résulte que : $(\lambda^3 - 3 \lambda^2 + 2 \lambda) x = 0$.

Comme x est un vecteur propre, il est non nul et on a donc : $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. Ainsi, les valeurs propres possibles de p + q sont au plus 0, 1, 2.

- 5°) Etude des sous-espaces propres de f = p + q
- a) Démontrons par double inclusion l'égalité : $Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q)$:
- $\operatorname{si} x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$, alors p(x) = q(x) = 0, donc (p+q)(x) = 0 et $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$.
- si $x \in \text{Ker}(p+q)$, on a p(x) + q(x) = 0, puis en composant par p, on obtient : $p(x) + p \circ q(x) = 0$, puis en composant par q, on a : $q \circ p(x) + q(x) = 0$. Comme $p \circ q = q \circ p$, on a : p(x) = q(x) et comme p(x) + q(x) = 0, il vient : p(x) = q(x) = 0, donc : $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

En remplaçant les deux projecteurs p et q par les deux projecteurs $\mathrm{Id} - p$ et $\mathrm{Id} - q$, on obtient : $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) + (\mathrm{Id} - q)) = \mathrm{Ker}(p + q - 2 \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

b) Le réel 0 est valeur propre de f = p + q si et seulement si Ker(p + q) n'est pas réduit à $\{0\}$, donc si et seulement si : $Ker(f) = Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q) \neq \{0\}$. Le sous-espace propre de f associé à 0 est alors : $Ker(f) = Ker(p) \cap Ker(q)$.

Et 2 est valeur propre de f = p + q si et seulement si Ker(p + q - 2 Id) n'est pas réduit à $\{0\}$ 1, donc si et seulement si : $Ker(f - 2 Id) = Ker(p + q - 2 Id) = Im(p) \cap Im(q) \neq \{0\}$. Le sous-espace propre de f associé à 2 est alors : $Ker(f - 2 Id) = Im(p) \cap Im(q)$.

c) Montrons l'inclusion : $Im(2 f - f^2) \subset Ker(Id - f)$.

Si
$$y = (2 f - f^2)(x) \in \text{Im}(2 f - f^2)$$
, on a, compte tenu de la relation $f^3 - 3 f^2 + 2 f = 0$:

$$(\text{Id} - f)(y) = (\text{Id} - f) \circ (2 f - f^2)(x) = (f^3 - 3 f^2 + 2 f)(x) = 0.$$

Il en résulte que $y \in \text{Ker}(\text{Id} - f)$, ce qui établit l'inclusion voulue.

Réciproquement, comme on a : $x = (\operatorname{Id} - f)^2(x) + (2f - f^2)(x)$ pour tout vecteur $x \in E$, on en tire que si $x \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - f)$, alors $x = (2f - f^2)(x) \in \operatorname{Im}(2f - f^2)$, d'où : $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - f) \subset \operatorname{Im}(2f - f^2)$. On en déduit que : $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - f) = \operatorname{Im}(2f - f^2)$.

Et en remplaçant f = p + q, on a : $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(2 f - f^2) = \operatorname{Im}(p + q - 2 p \circ q)$.

d) On remarque que : $(\operatorname{Id} - 2p)^2 = \operatorname{Id} - 4p + 4p^2 = \operatorname{Id}$, donc $\operatorname{Id} - 2p$ est inversible. On a d'autre part : $(\operatorname{Id} - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q) = -p + q$. Le réel 1 est ainsi valeur propre de p + q si et seulement si $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(p + q - 2p \circ q) \neq \{0\}$, donc si et seulement si : $p + q - 2p \circ q \neq 0$, ou encore, puisque $\operatorname{Id} - 2p$ est inversible, si et seulement si : $(\operatorname{Id} - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q) = -p + q \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $p \neq q$.

- 6°) Réduction de l'endomorphisme f = p + q
- a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2x_2$. On a donc : $f(x) = x_1 + 2x_2$ et $f^2(x) = x_1 + 4x_2$. On en déduit que : $x_2 = \frac{1}{2} \left(f^2(x) - f(x) \right)$, $x_1 = 2 f(x) - f^2(x)$, et $x_0 = \frac{1}{2} \left(2x - 3 f(x) + f^2(x) \right)$.
- b) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \text{Ker}(f)$, $x_1 \in \text{Ker}(f \text{Id})$, $x_2 \in \text{Ker}(f 2 \text{Id})$. D'après ce qui précède, on arrive nécessairement aux formules ci-dessus. Ainsi, l'écriture $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \text{Ker}(f)$, $x_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$, $x_2 \in \text{Ker}(f - 2 \text{Id})$ est unique et la somme Ker(f) + Ker(f - Id) + Ker(f - 2 Id) est donc directe.

- Considérons maintenant un vecteur $x \in E$ et définissons x_0 , x_1 , x_2 par les formules ci-dessus.

On a bien $x_0 + x_1 + x_2 = x$ et on a de plus, compte tenu de la relation $f^3 - 3 f^2 + 2 f = 0$:

$$x_0 \in \text{Ker}(f) \text{ car} : f(x_0) = \frac{1}{2} (2 f(x) - 3 f^2(x) + f^3(x)) = 0.$$

$$x_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \text{ car} : (f - \text{Id})(x_1) = -\frac{1}{2} (f^3(x) - 3 f^2(x) + 2 f(x)) = 0.$$

$$x_2 \in \text{Ker}(f - 2 \text{ Id}) \text{ car} : (f - 2 \text{ Id})(x_2) = \frac{1}{2} (f^3(x) - 3 f^2(x) + 2 f(x)) = 0.$$

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \text{Ker}(f)$, $x_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$, $x_2 \in \text{Ker}(f - 2 \text{Id})$.

Ainsi, E est égal à la somme directe $Ker(f) \oplus Ker(f - Id) \oplus Ker(f - 2 Id)$ et on a :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2 \text{Id})$$

avec :
$$x = \frac{1}{2} (2x - 3f(x) + f^2(x)) + (2f(x) - f^2(x)) + \frac{1}{2} (f^2(x) - f(x)).$$

c) Les sous-espaces propres possibles de f = p + q sont au plus Ker(f), Ker(f - Id), Ker(f - 2 Id) (et ces sous-espaces sont réduits à $\{0\}$ s'il ne s'agit pas de sous-espaces propres).

Or ces sous-espaces sont supplémentaires dans *E* comme on vient de l'établir.

Donc l'endomorphisme f = p + q est diagonalisable, et les projecteurs associant à un vecteur $x \in E$ ses projections sur Ker(f), Ker(f - Id), Ker(f - 2 Id) sont, comme on vient de l'établir :

$$\pi_0 = \frac{1}{2} (2 \operatorname{Id} - 3 f + f^2), \quad \pi_1 = 2 f - f^2, \quad \pi_2 = \frac{1}{2} (f^2 - f).$$

Si certains des sous-espaces Ker(f), Ker(f - Id), Ker(f - 2 Id) ne sont pas sous-espaces propres, c'est à dire sont réduits au vecteur nul, alors les projecteurs correspondants π_0 , π_1 , π_2 sont nuls.