Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2021

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques PT - TSI (3h)

■ PROBLÈME I : PARABOLE ET CISSOÏDE DROITE

1°) *Etude d'une première courbe paramétrée*

a) La projection orthogonale du point $P(t)$ de coordonnées $(t,\ f(t))$ sur la droite horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{p}{2}$ est évidemment le point $H(t)$ de coordonnées $\left(t,\ -\frac{p}{2}\right)$.

La distance du point $P(t)$ à la directrice $\mathcal{D}$ est donc $P(t)\,H(t) = \left|f(t) + \frac{p}{2}\right|$.

La distance du point $P(t)$ au foyer $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ est $P(t)\,F = \sqrt{t^2 + \left(f(t) - \frac{p}{2}\right)^2}$.

Pour tout réel t, le point $P(t)$ est donc équidistant de la droite $\mathcal{D}$ et du point F si et seulement si :

$$\left(f(t) + \frac{p}{2}\right)^2 = t^2 + \left(f(t) - \frac{p}{2}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t^2}{2\,p}.$$

b) La courbe représentative de l'application $t \mapsto M(t)\left(t,\ \frac{t^2}{2\,p}\right)$ est la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2\,p}$.

c) La tangente à $\mathcal{P}$ au point $P(t)$ est dirigée par le vecteur dérivé $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}t}(t)$ de composantes $\left(1,\ \frac{t}{p}\right)$.

On obtient une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ au point $P(t)$ en écrivant qu'un point M appartient à celle-ci si et et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{P(t)\,M}$ et $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}t}(t)$ sont liés, c'est à dire :

$$\det\left(\overrightarrow{P(t)\,M},\ \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}t}(t)\right) = \begin{vmatrix} x - t & 1 \\ y - \frac{t^2}{2\,p} & \frac{t}{p} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on voit qu'une équation de la tangente $\mathcal{T}(t)$ est donc : $t\,x - p\,y - \frac{t^2}{2} = 0$.

d) Le triangle de sommets $P(t)$, F, $H(t)$ est isocèle en $P(t)$ car ce point est équidistant de $\mathcal{D}$ et F, ce qui s'exprime par $P(t)\,H(t) = P(t)\,F$. Le milieu $I(t)$ du côté $F\,H(t)$ a pour coordonnées $\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$.

Les coordonnées de $I(t)$ étant $\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$, il est clair que $I(t)$ décrit l'axe Ox lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

e) La tangente en $P(t)$ à la courbe $\mathcal{P}$ passe par $I(t)$ puisque $t\,x - p\,y - \frac{t^2}{2} = 0$ avec $x = \frac{t}{2}$ et $y = 0$.

Ainsi cette tangente est la médiane issue de $P(t)$ du triangle isocèle de sommets $P(t)$, F, $H(t)$, et c'est donc aussi sa hauteur issue de $P(t)$ et la médiatrice du côté $F\,H(t)$.

f) Un point M appartient à la normale passant par O à la tangente à $\mathcal{P}$ en $P(t)$ si et seulement si : $\overrightarrow{OM}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$. Elle a donc pour équation : $p\,x + t\,y = 0$.

La projection du point O sur la tangente à la courbe C au point $P(t)$ est l'intersection de la tangente à la courbe C en $P(t)$ et de la normale passant par O à cette même tangente, ce qui donne :

$$x(t) = \frac{t^3}{2\left(t^2 + p^2\right)} \qquad ; \qquad y(t) = \frac{-p\,t^2}{2\left(t^2 + p^2\right)}.$$

2°) *Etude de la podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à son sommet O.*

a) Un rapide calcul des dérivées des fonctions précédentes donne :

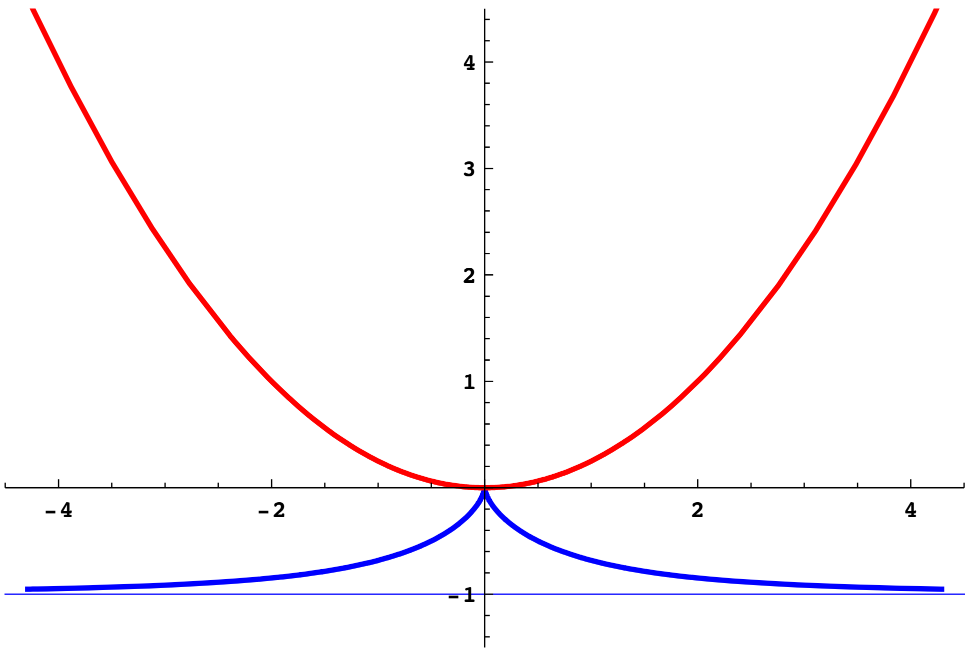
$$x'(t) = \frac{t^2\left(t^2 + 3\,p^2\right)}{2\left(t^2 + p^2\right)^2} \qquad ; \qquad y'(t) = \frac{-p^3\,t}{\left(t^2 + p^2\right)^2}.$$

b) Comme les fonctions x et y sont respectivement impaire et paire, on ne fait l'étude que sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $x'(t) \geq 0$, la fonction x croit de 0 à $+\infty$.
Comme $y'(t) \leq 0$, la fonction y décroît de 0 à $-\frac{p}{2}$.
Ainsi, on a une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{p}{2}$, qui n'est autre que la droite $\mathcal{D}$.

Pour $t > 0$, la tangente en $M(t)$ a pour pente : $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{2\,p^3}{t\left(t^2+3\,p^2\right)} < 0$.

Etudions maintenant la tangente en $M(0)$. La pente de la droite $M(0)\,M(t) = OM\,(t)$ est $\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{p}{t}$.
Lorsque t tend vers 0, la position-limite de cette droite est donc verticale, et c'est l'axe Oy.
La tangente en $M(0) = O$ à la courbe est donc l'axe des ordonnées Oy.

c) On en tire le tracé de la courbe C, ensemble des projections de l'origine O sur les tangentes à $\mathcal{P}$. Pour $p = 2$ (où le foyer F a pour coordonnées $(0,\ 1)$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $y = -1$), voici la parabole $\mathcal{P}$ et la cissoïde C :



■ PROBLÈME II : SOMME DE DEUX PROJECTEURS QUI COMMUTENT

1°) *Question préliminaire : rappels sur les projecteurs*

a) L'endomorphisme $\mathrm{Id} - p$ est un projecteur si et seulement s'il vérifie : $(\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - p$, et donc si et seulement si : $\mathrm{Id} - 2\,p + p^2 = \mathrm{Id} - p$, ou si et seulement si : $p^2 = p$, donc si et seulement si p est un projecteur.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$ par double inclusion :
- Si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, alors $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \subset \mathrm{Im}(p)$.
- Si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $v \in E$ tel que $x = p(v)$; on a donc $(\mathrm{Id} - p)\,(x) = p(v) - p^2(v) = 0$.
  Donc $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, d'où $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$.

Et en appliquant cette relation à $\mathrm{Id} - p$ qui est aussi un projecteur, on a donc : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.

c) Pour tout $x \in E$, on a : $x = p(x) + (\mathrm{Id} - p)\,(x)$ où $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $(\mathrm{Id} - p)\,(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}(p)$.
Ceci prouve que $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.
Et pour $x \in \mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \bigcap \mathrm{Ker}(p)$, on a $x = p(x)$ et $p(x) = 0$, donc $x = 0$.
Ceci prouve que $\mathrm{Im}(p) \bigcap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$, et donc : $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

d) Comme $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on obtient une base de E par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
Pour $x \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, on a $p(x) = x$, et pour $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $p(x) = 0$.
La matrice de p dans la base obtenue par réunion de bases de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ est donc :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

où $r = \mathrm{rg}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p))$.
Il en résulte qu'un projecteur est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont 1 à l'ordre r et 0 à l'ordre $\dim(E) - r = d - r$.

■ PARTIE I : ETUDE D'UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$

2°) *Nature des endomorphismes p et q*

a) Un simple produit matriciel montre qu'on a $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ avec les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que les endomorphismes p et q sont des projecteurs.

b1) On sait que les vecteurs-colonnes de P engendrent $\mathrm{Im}(p)$:

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\right).$$

En effet, les 2 premiers vecteurs-colonnes sont indépendants et le troisième en est combinaison linéaire (c'est l'opposé de la somme des deux premiers).
$\mathrm{Im}(p)$ est donc un plan vectoriel, dont on voit qu'une équation est : $x + y + z = 0$.

Le noyau de p est l'ensemble des vecteurs de composantes x, y, z vérifiant :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \left| \begin{array}{l} 2\,x - y - z = 0 \\ -x + 2\,y - z = 0 \\ -x - y + 2\,z = 0 \end{array} \right.$$

Ici encore, on peut supprimer la troisième équation qui est combinaison linéaire des 2 autres.
Ker(p) est donc l'intersection de deux plans, c'est donc une droite, dont un rapide calcul montre qu'elle est dirigée par le vecteur u de composantes (1, 1, 1).
Ainsi, p est la projection sur Im(p) : $x + y + z = 0$ dans la direction Ker(p) = Vect(u). Ajoutons que si l'on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle, on observe que Im(p) est orthogonal à Ker(p), et p est la projection orthogonale sur le plan Im(p) : $x + y + z = 0$.

b2) On sait que les vecteurs-colonnes de Q engendrent Im(q) :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{6} \\ \frac{4}{6} \\ -\frac{2}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right).$$

Im(q) est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur directeur v de composantes (1, −2, 1).

Le noyau de q est l'ensemble des vecteurs de composantes x, y, z vérifiant :

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad x - 2\,y + z = 0.$$

En effet, les 3 équations du système sont ici proportionnelles.
Im(q) est donc un plan vectoriel, dont une équation est : $x - 2\,y + z = 0$.
Ainsi, q est la projection sur Im(q) = Vect(v) dans la direction Ker(q) : $x - 2\,y + z = 0$. Ajoutons que si l'on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle, on observe que Im(q) est orthogonal à Ker(q), et q est la projection orthogonale sur la droite Vect(v) où v a pour composantes (1, −2, 1).

c) Deux produits matriciels montrent qu'on a $PQ = QP$ avec :

$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = QP.$$

3°) *Etude de l'endomorphisme* $p + q$

a) La matrice $P + Q$ de l'endomorphisme $p + q$ et son polynôme caractéristique sont :

$$P + Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{4}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{4}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(X\,\mathrm{Id} - (P + Q)) = \begin{vmatrix} X - \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} & X - \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & X - \frac{5}{6} \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant, il vient :

$$\det(X\,\mathrm{Id} - (P + Q)) = X^3 - 3\,X^2 + 2\,X = X(X - 1)\,(X - 2).$$

b) L'endomorphisme $p+q$ a donc pour valeurs propres 0, 1 et 2.
Comme $p+q$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant 3 valeurs propres distinctes, il est diagonalisable.

c) Un vecteur propre v_0 de $p+q$ vérifie $(p+q)(v_0)=0$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} 5x-4y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+4y-5z=0 \end{array} \right.$$

L'une de ces trois équations est évidemment inutile, et en résolvant les deux autres, on voit que $\mathrm{Ker}(p+q)$ est la droite dirigée par le vecteur v_0 de composantes $(1, 1, 1)$.

- Un vecteur propre v_1 de $p+q$ vérifie $(p+q)(v_1)=v_1$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} x+4y+z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x+4y+z=0 \end{array} \right.$$

De même, $\mathrm{Ker}(p+q-\mathrm{Id})$ est la droite dirigée par le vecteur v_1 de composantes $(1, 0, -1)$.

- Un vecteur propre v_2 de $p+q$ vérifie $(p+q)(v_2)=2\,v_2$, soit :

$$(P+Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} 7x+4y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+4y+7z=0 \end{array} \right.$$

De même, $\mathrm{Ker}(p+q-\mathrm{Id})$ est la droite dirigée par le vecteur v_2 de composantes $(1, -2, 1)$.

d) La matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (v_0, v_1, v_2) s'écrit :

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^{-1}(P+Q)\,R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que : $P\,v_0=0,\ P\,v_1=v_1,\ P\,v_2=v_2$ et : $Q\,v_0=0,\ Q\,v_1=0,\ Q\,v_2=v_2$.
On en déduit les matrices des endomorphismes p et q dans la base (v_0, v_1, v_2) :

$$R^{-1}\,P\,R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R^{-1}\,Q\,R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve par somme que : $R^{-1}\,P\,R+R^{-1}\,Q\,R=R^{-1}(P+Q)\,R=\mathrm{Diag}(0, 1, 2)$.

■ PARTIE II : SOMME DE 2 PROJECTEURS QUI COMMUTENT

4°) *Etude des valeurs propres de $f=p+q$*

a) Comme $f=p+q$ et comme $p\circ q=q\circ p$, on a : $f^2=(p+q)^2=p+q+2\,p\circ q=f+2\,p\circ q$.
De même, on a : $f^3=(p+q)^3=p+q+6\,p\circ q=f+6\,p\circ q$.
Il en résulte que : $f^3-3\,f^2+2\,f=0$.

b) Si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, on a : $f(x)=\lambda\,x$.
On en déduit que : $f^2(x)=f(\lambda\,x)=\lambda\,f(x)=\lambda^2\,x$ et $f^3(x)=f\left(\lambda^2\,x\right)=\lambda^2\,f(x)=\lambda^3\,x$.
Comme on a : $f^3(x)-3\,f^2(x)+2\,f(x)=0$, il en résulte que : $\left(\lambda^3-3\,\lambda^2+2\,\lambda\right)x=0$.
Comme x est un vecteur propre, il est non nul et on a donc : $\lambda^3-3\,\lambda^2+2\,\lambda=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0$.
Ainsi, les valeurs propres possibles de $p+q$ sont au plus 0, 1, 2.

5°) *Etude des sous-espaces propres de* $f = p + q$

a) Démontrons par double inclusion l'égalité : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$:

- si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, alors $p(x) = q(x) = 0$, donc $(p+q)(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$.
- si $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, on a $p(x) + q(x) = 0$, puis en composant par p, on obtient : $p(x) + p \circ q(x) = 0$, puis en composant par q, on a : $q \circ p(x) + q(x) = 0$. Comme $p \circ q = q \circ p$, on a : $p(x) = q(x)$ et comme $p(x) + q(x) = 0$, il vient : $p(x) = q(x) = 0$, donc : $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

En remplaçant les deux projecteurs p et q par les deux projecteurs $\mathrm{Id} - p$ et $\mathrm{Id} - q$, on obtient :

$$\mathrm{Ker}((\mathrm{Id}-p) + (\mathrm{Id}-q)) = \mathrm{Ker}(p+q-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$

b) Le réel 0 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p+q)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc si et seulement si : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0\}$.
Le sous-espace propre de f associé à 0 est alors : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Et 2 est valeur propre de $f = p + q$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p+q-2\,\mathrm{Id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$l, donc si et seulement si : $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(p+q-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0\}$.
Le sous-espace propre de f associé à 2 est alors : $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

c) Montrons l'inclusion : $\mathrm{Im}\left(2f - f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$.

Si $y = \left(2f - f^2\right)(x) \in \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right)$, on a, compte tenu de la relation $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$:

$$(\mathrm{Id}-f)(y) = (\mathrm{Id}-f) \circ \left(2f - f^2\right)(x) = \left(f^3 - 3f^2 + 2f\right)(x) = 0.$$

Il en résulte que $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$, ce qui établit l'inclusion voulue.

Réciproquement, comme on a : $x = (\mathrm{Id}-f)^2(x) + \left(2f - f^2\right)(x)$ pour tout vecteur $x \in E$, on en tire que si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f)$, alors $x = \left(2f - f^2\right)(x) \in \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right)$, d'où : $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f) \subset \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right)$.
On en déduit que : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-f) = \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right)$.
Et en remplaçant $f = p + q$, on a : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\left(2f - f^2\right) = \mathrm{Im}(p + q - 2\,p \circ q)$.

d) On remarque que : $(\mathrm{Id} - 2\,p)^2 = \mathrm{Id} - 4\,p + 4\,p^2 = \mathrm{Id}$, donc $\mathrm{Id} - 2\,p$ est inversible.
On a d'autre part : $(\mathrm{Id} - 2\,p) \circ (p + q - 2\,p \circ q) = -p + q$.
Le réel 1 est ainsi valeur propre de $p + q$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(p + q - 2\,p \circ q) \neq \{0\}$, donc si et seulement si : $p + q - 2\,p \circ q \neq 0$, ou encore, puisque $\mathrm{Id} - 2\,p$ est inversible, si et seulement si : $(\mathrm{Id} - 2\,p) \circ (p + q - 2\,p \circ q) = -p + q \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $p \neq q$.

6°) *Réduction de l'endomorphisme* $f = p + q$

a) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ appartenant à E avec $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2\,x_2$.

On a donc : $f(x) = x_1 + 2\,x_2$ et $f^2(x) = x_1 + 4\,x_2$.

On en déduit que : $x_2 = \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right)$, $x_1 = 2\,f(x) - f^2(x)$, et $x_0 = \frac{1}{2}\left(2\,x - 3\,f(x) + f^2(x)\right)$.

b) Soit un vecteur $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

D'après ce qui précède, on arrive nécessairement aux formules ci-dessus.

Ainsi, l'écriture $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est unique et la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est donc directe.

- Considérons maintenant un vecteur $x \in E$ et définissons x_0, x_1, x_2 par les formules ci-dessus.
  On a bien $x_0 + x_1 + x_2 = x$ et on a de plus, compte tenu de la relation $f^3 - 3\,f^2 + 2\,f = 0$:
  $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ car : $f(x_0) = \frac{1}{2}\left(2\,f(x) - 3\,f^2(x) + f^3(x)\right) = 0$.
  $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ car : $(f - \mathrm{Id})\,(x_1) = -\frac{1}{2}\left(f^3(x) - 3\,f^2(x) + 2\,f(x)\right) = 0$.
  $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ car : $(f - 2\,\mathrm{Id})\,(x_2) = \frac{1}{2}\left(f^3(x) - 3\,f^2(x) + 2\,f(x)\right) = 0$.
  Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_0 + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $x_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.
  Ainsi, E est égal à la somme directe $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et on a :
  $$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$$
  $$\text{avec : } \quad x = \frac{1}{2}\left(2\,x - 3\,f(x) + f^2(x)\right) + \left(2\,f(x) - f^2(x)\right) + \frac{1}{2}\left(f^2(x) - f(x)\right).$$

c) Les sous-espaces propres possibles de $f = p + q$ sont au plus $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ (et ces sous-espaces sont réduits à $\{0\}$ s'il ne s'agit pas de sous-espaces propres).
Or ces sous-espaces sont supplémentaires dans E comme on vient de l'établir.
Donc l'endomorphisme $f = p + q$ est diagonalisable, et les projecteurs associant à un vecteur $x \in E$ ses projections sur $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont, comme on vient de l'établir :
$$\pi_0 = \frac{1}{2}\left(2\,\mathrm{Id} - 3\,f + f^2\right), \quad \pi_1 = 2\,f - f^2 \quad , \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\left(f^2 - f\right).$$
Si certains des sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ ne sont pas sous-espaces propres, c'est à dire sont réduits au vecteur nul, alors les projecteurs correspondants π_0, π_1, π_2 sont nuls.