CONCOURS CPGE

EPITA / IPSA / ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS POUR VOUS PRÉPARER À UNE MULTITUDE DE MÉTIERS

Samedi 04 Avril 2020

OPTION : PHYSIQUE

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Quelques moyens de mesure du temps

- Calculatrice interdite.

  En conséquence on utilisera pour les applications numériques soit les aides aux calculs ci-dessous, soit un calcul approché à un chiffre significatif.

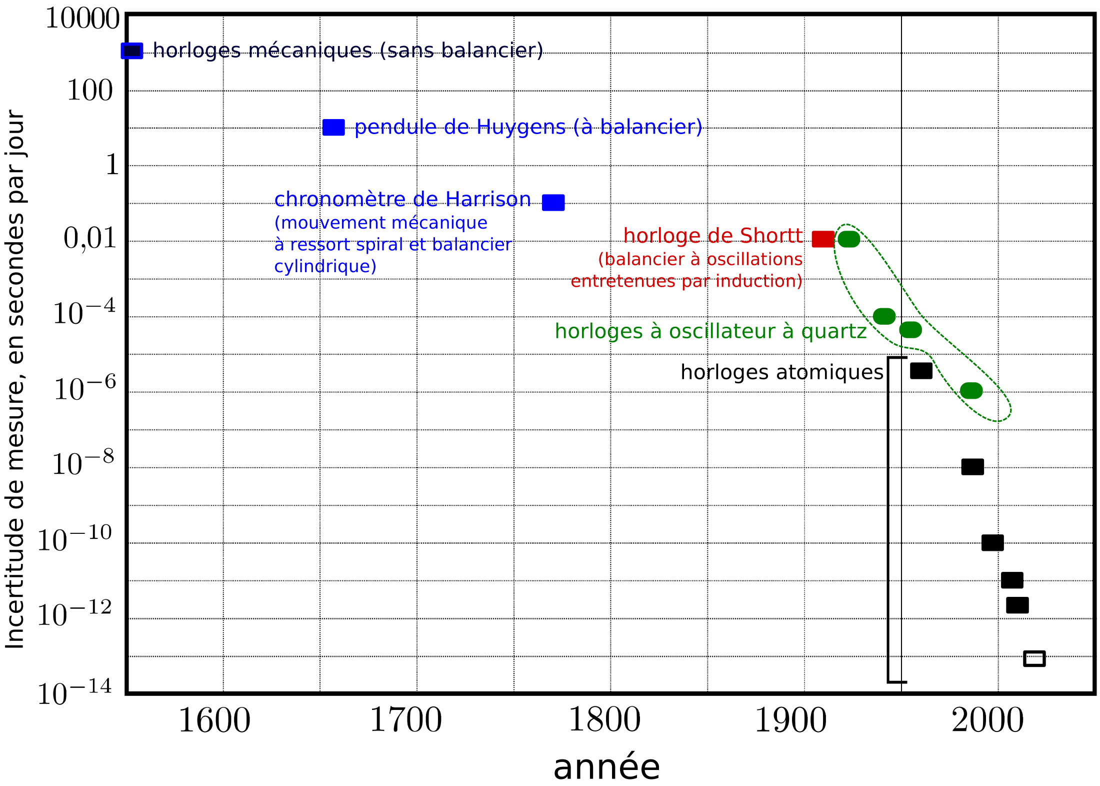
  $30^o = 0{,}5\,\mathrm{rad}$ $\qquad \dfrac{0{,}5^2}{16} \times 3600 = 62$ $\qquad \dfrac{4{,}3}{\sqrt{2}} = 3$ $\qquad 9{,}8 \simeq 0{,}99\pi^2$

  $\dfrac{47 \times 0{,}2}{4{,}3} = 2{,}2$ $\qquad \dfrac{47 \times 4{,}3}{0{,}2} = 1010$ $\qquad \dfrac{4{,}3}{47 \times 0{,}2} = 0{,}46$

- Les parties I et II sont indépendantes et d'un poids similaire dans le barème.

Introduction

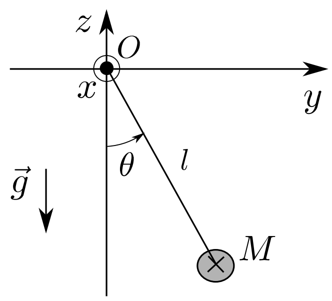
La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques... La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui (voir graphique ci-dessous).



I Mesure du temps par horloge à balancier : étude du pendule

Galilée montre vers 1610 que les oscillations d'un pendule sont isochrones : elles ne dépendent pas de l'amplitude du mouvement. Huygens exploite ceci à partir de 1657 pour concevoir une horloge dont le mouvement est régulé par les oscillations d'un pendule : la précision s'en trouve grandement améliorée. C'est ce type d'horloge que nous étudions.

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note l sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On négligera tout frottement. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.



Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle

1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, donner une expression de la période T des oscillations du pendule. Cette expression sera à une constante multiplicative A près, A étant sans dimension. On ne fera pas intervenir les conditions initiales dans l'analyse.

Afin d'obtenir A, il faut mener une analyse plus poussée du problème. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

On suppose que le pendule est lâché d'un angle initial $\theta_0 \ll 1\,\mathrm{rad}$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 = 0$.

2. Donner l'expression du moment cinétique en O de la masse en fonction de l, $\dot{\theta}$, m et d'un vecteur unitaire. On fera apparaître sur un schéma tout vecteur introduit pour le calcul.

3. En utilisant le théorème du moment cinétique, en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

4. Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre en donnant l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0, g, l et t.

5. Donner l'expression T_0 de la période des oscillations.

6. Un peu avant la Révolution française, il a été proposé de définir l'unité "un mètre" comme la longueur du fil d'un pendule pour lequel une demi-oscillation dure une seconde (la période est donc de $2\,\mathrm{s}$). Ce n'est finalement pas ceci qui a été retenu, mais une définition basée sur la longueur du méridien terrestre. Quelle est aujourd'hui la longueur d'un tel pendule ?

Expression de la période dans le cas des grandes oscillations

On remplace la ficelle par une tige rigide, de masse négligeable par rapport à la masse m. Ceci ne change donc rien à la mise en équation, et permet simplement au pendule de faire des mouvements de grande amplitude sans que la ficelle ne se détende (par exemple lorsque le pendule est vers $\theta = \pi$). La force exercée par la tige sur la masse ne travaille pas. On ne tiendra donc pas compte de cette tige.

7. Montrer que l'énergie mécanique E_m de la masse ponctuelle M peut s'écrire

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta.$$

On suppose dans la suite que le pendule n'effectue <u>pas</u> de tour complet, et qu'il est lâché d'un angle θ_0 avec une vitesse angulaire initiale nulle.

8. Justifier qu'au cours du mouvement, $E_m = -mgl\cos\theta_0$.

9. En déduire une expression de l'angle infinitésimal $\mathrm{d}\theta$ parcouru par le pendule pendant un temps $\mathrm{d}t$.

10. En déduire que la période des oscillations du pendule s'écrit

$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}, \quad \text{avec} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

Cette expression montre que la période du pendule dépend en réalité de l'amplitude θ_0 des oscillations, contrairement à ce qui a été trouvé dans la partie précédente où seules les petites oscillations étaient considérées. Ceci pose un problème majeur dans la conception d'horloges dont la régularité est basée sur les oscillations d'une masse, et il est souhaitable d'évaluer l'expression de cette période.

Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes

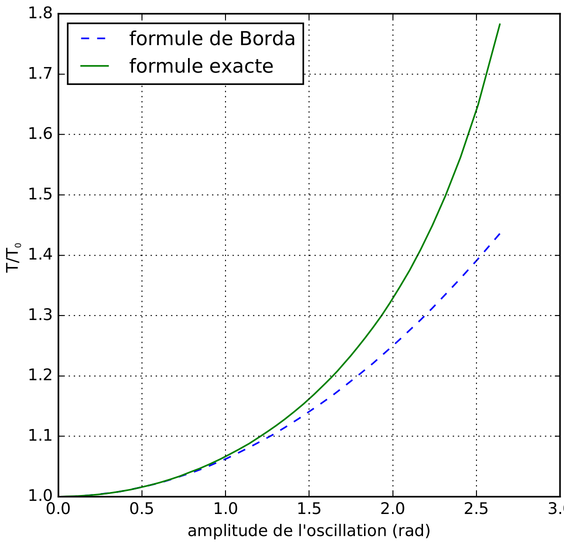
L'équation (1) contient une intégrale difficile à exprimer analytiquement. Nous proposons ici d'obtenir une expression approchée de la période T sans passer par ce calcul d'intégrale.
On part de l'équation du mouvement $\ddot{\theta}+\omega_0^2 \sin\theta = 0$, avec $\omega_0^2 = g/l$, et on effectue les étapes suivantes :

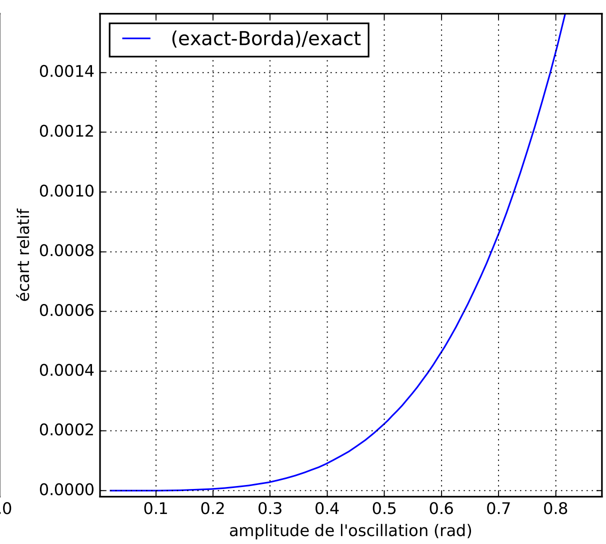
- On utilise cette fois le développement de $\sin\theta$ à l'ordre supérieur : $\sin\theta \simeq \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$.
- L'équation différentielle obtenue n'est alors plus linéaire. On continue toutefois de chercher une solution sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin\omega t$.
- Pour exprimer le terme en θ^3, on utilise une formule trigonométrique :
$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t.$$
- On néglige le terme en $\sin 3\omega t$.

11. En suivant les indications ci-dessus, montrer qu'on aboutit à l'expression $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \dfrac{\theta_0^2}{8}\right)$.

12. En déduire qu'à l'ordre le plus bas en θ_0, on a l'expression suivante de la période des oscillations :
$$T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right), \quad \text{avec} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (2)$$

Cette formule est appelée formule de Borda. Le graphique ci-dessous montre la comparaison entre T donnée par la formule exacte (relation (1)) et T donnée par la formule de Borda (relation (2)).





On prend $\theta_0 = 30°$ et $T_0 = 1\,\text{s}$.

13. En utilisant la formule de Borda, quel pourcentage d'erreur sur la période réelle commet-on ?

14. On utilise la formule de Borda. Si on compte 3600 oscillations du pendule (soit donc une heure pour un pendule de période 1 s), quelle durée s'est-elle écoulée ?

    D'après le graphique donné en début d'énoncé, peut-on dire que Huygens avait pris en compte la dépendance en θ_0 pour réaliser ses horloges ?