Samedi 04 Avril 2020

# OPTION: MATHEMATIQUES

*MP / PC / PSI / PT / TSI*

**Durée : 2 Heures**

-----------------------------------------------------------------------------------------

## Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

# Concours EPITA-IPSA-ESME 2020

**Epreuve de mathématiques**

---

Ce sujet a pour objet l'étude de propriétés des solutions $y$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + e^t y = 0.$$

Le problème s'organise en trois parties relativement indépendantes : on étudie dans la partie I une solution particulière de l'équation (E), puis ensuite l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ (ces dernières sont en fait les restrictions à $\mathbb{R}_-$ des solutions sur $\mathbb{R}$). Dans la partie II on étudie le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de (E), et enfin dans la partie III, on étudie les zéros positifs des solutions de (E).

## ■ PARTIE I : Etude sur $\mathbb{R}_-$ des solutions de l'équation (E)

1°) *Etude d'une solution de (E) définie sur* $\mathbb{R}$

Dans cette question, on considère la somme de la série entière suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b) On considère alors la fonction définie pour tout réel $t$ par $f(t) = S(e^t)$.
Justifier que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sous forme d'une série $f''(t)$.
Expliciter alors sans signe $\sum$ l'expression $f''(t) + e^t f(t)$ et conclure.

c) Déterminer la limite éventuelle de $f(t)$ lorsque $t$ tend vers $-\infty$.

d) En regroupant deux par deux les termes de la série définissant $f(t)$, démontrer que $f(t) > 0$ pour tout réel $t \leq 0$. En procédant par exemple de façon analogue, déterminer le signe de $f'$ pour tout réel $t \leq 0$ et le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}_-$.

2°) *Etude d'une solution de (E) définie sur* $\mathbb{R}_-$

Le résultat précédent établissant que $f$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_-$ autorise à poser :

$$\forall\, t \leq 0, \quad g(t) = f(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}\tau}{f^2(\tau)}.$$

a) Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ et en déduire $g''(t) + e^t g(t)$ pour $t \leq 0$.

b) Préciser le signe de $g(t)$ pour $t \leq 0$ et démontrer l'équivalence $g(t) \sim -t$ quand $t$ tend vers $-\infty$.

3°) *Etude des solutions de (E) sur* $\mathbb{R}_-$

a) Justifier l'indépendance linéaire de la restriction de $f$ à $\mathbb{R}_-$ et de $g$.
Expliciter la forme générale des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_-$.

b) Préciser quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui ont une limite finie en $-\infty$, les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui sont bornées, les solutions sur $\mathbb{R}_-$ qui tendent vers $\pm\infty$ en $-\infty$.

## ■ PARTIE II : Etude asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation (E)

4°) *Limite en $+\infty$ des solutions de (E)*

A toute solution $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de (E), on associe la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t)\, e^{t/5}$.

a) Exprimer $y$, $y'$, $y''$ en fonction des dérivées $z$, $z'$, $z''$, puis en tenant compte du fait que $y$ est solution de (E), exprimer $z$ en fonction de $z'$ et $z''$.

b) En déduire l'égalité suivante pour tout $t \geq 0$ :

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{z'^2(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, d\tau - \int_0^t \frac{2\, z'(\tau)\, z''(\tau)}{e^\tau + \frac{1}{25}}\, d\tau.$$

c) A l'aide d'une intégration par parties de la dernière intégrale, en déduire pour tout $t \geq 0$ :

$$z^2(t) = z^2(0) + \frac{25}{26}\, z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + \frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{\left(e^\tau - \frac{4}{25}\right)}{\left(e^\tau + \frac{1}{25}\right)^2}\, z'^2(\tau)\, d\tau.$$

d) En déduire que $z$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et qu'on a pour tout $t \geq 0$ :

$$|y(t)| \leq e^{-t/5}\sqrt{z^2(0) + \frac{25}{26}\, z'^2(0)}\ .$$

Préciser alors la limite de toute solution $y$ de (E) en $+\infty$.

## ■ PARTIE III : Etude des zéros sur $\mathbb{R}_+$ des solutions de l'équation (E)

5°) *Premières propriétés des zéros des solutions non nulles de (E)*

a) Rappeler l'énoncé précis du théorème de Cauchy-Lipschitz concernant l'équation linéaire (E).

b) Etant donné un réel $t_0$, en déduire les solutions $y$ de (E) vérifiant $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.
En déduire que si une solution non nulle $y$ de (E) s'annule en $t_0$, elle change de signe en $t_0$.

c) On suppose qu'il existe un segment $[a, b]$ $(a < b)$ dans lequel une solution *non nulle* $y$ de (E) s'annule une infinité de fois, de sorte qu'on peut construire une suite $(t_n)$ de zéros deux à deux distincts de cette solution $y$ appartenant à $[a, b]$.

- Justifier l'existence d'une suite $\left(t_{\varphi(n)}\right)$ extraite de $(t_n)$ qui converge vers un réel $t$ de $[a, b]$.
- Justifier, pour tout entier naturel $n$, que $y'$ s'annule au moins une fois en un réel $c_{\varphi(n)}$ dans l'intervalle ouvert $\left]\, t_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n+1)}\right[$ ou $\left]\, t_{\varphi(n+1)}, t_{\varphi(n)}\right[$ selon l'ordre des réels $t_{\varphi(n)}$ et $t_{\varphi(n+1)}$.
- Montrer qu'on a $y(t) = y'(t) = 0$, puis en déduire que $y$ est la solution nulle.
- Qu'en déduit-on?

6°) *Existence d'un zéro strictement positif d'une solution non nulle*

Soit une solution non nulle $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + e^t\, y = 0$.

On considère aussi la solution $z : t \mapsto \sin(t)$ de l'équation $z'' + z = 0$.

a) Exprimer la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t)$ en fonction de $y$ et $z$.

b) On suppose que $y$ ne s'annule pas sur $]\, 0, \pi]$ et garde un signe strictement positif par exemple (ce qu'il est possible de supposer, quitte à changer $y$ en $-y$).
Préciser le signe de $W'$ sur $]\, 0, \pi[$, les valeurs de $W(0)$ et $W(\pi)$.
Conclure à une contradiction et en déduire que $y$ s'annule au moins une fois dans $]\, 0, \pi]$.

c) Compte tenu de l'ensemble des résultats précédents, justifier l'existence d'un plus petit zéro strictement positif de $y$ qu'on note désormais $t_1$ et qui appartient à $]\, 0, \pi]$.

7°) *Existence d'une suite croissante de zéros d'une solution non nulle dans* $\mathbb{R}_+$
Soit une solution non nulle $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' + e^t\, y = 0$, et on désigne toujours par $t_1$ le plus petit zéro strictement positif de $y$.

On considère aussi la solution $z : t \mapsto \sin\left(e^{\frac{t_1}{2}}(t - t_1)\right)$ de l'équation $z'' + e^{t_1}\, z = 0$.

a) Exprimer la dérivée de la fonction $W : t \mapsto y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t)$ en fonction de $y$ et $z$.

b) On suppose que $y$ ne s'annule pas sur $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right]$ et garde un signe qu'on peut toujours supposer strictement positif par exemple, quitte à changer $y$ en $-y$.

Préciser le signe de $W'$ sur $] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi [$ et les valeurs de $W(t_1)$ et $W\left(t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi\right)$.

En déduire de même que $y$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right]$.

c) Justifier l'existence d'un plus petit zéro strictement supérieur à $t_1$ de $y$ qu'on note désormais $t_2$ et qui appartient à $\left] t_1, t_1 + e^{-\frac{t_1}{2}} \pi \right]$.

d) En déduire que les zéros strictement positifs de $y$ peuvent être classés en une suite réelle $(t_n)$ strictement croissante telle qu'on ait pour tout entier $n \geq 1$ : $t_{n+1} - t_n \leq \pi\, e^{-\frac{t_n}{2}}$.

e) On suppose la suite croissante $(t_n)$ majorée, de sorte qu'elle converge vers une limite finie $L$.

Montrer que $L$ est un zéro de $y$, et établir que $y$ admet au moins un zéro dans $\left] L, L + e^{-\frac{L}{2}} \pi \right]$.

En déduire une contradiction, et montrer que $\lim t_n = +\infty$, puis que $\lim(t_{n+1} - t_n) = 0$.

f) Donner l'allure de la courbe représentative sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie dans la partie I.

---

Fin de l'épreuve