

Concours EPITA - IPSA - ESME

Epreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Droïde BB-8

Durée : 2 heures

L'utilisation de calculatrices est interdite. La consultation de documents est interdite.

Le sujet comporte 5 pages.

Présentation

L'univers de Star Wars a été durant 40 ans très novateur dans l'univers de la science-fiction. Lors du film « Le réveil de la Force », un nouveau robot d'un design novateur est apparu : le droïde BB-8.



Le droïde BB-8, apparu pour la première fois en 2015, est constitué d'une sphère surmontée d'une sphère pouvant rouler dans n'importe quelle direction. L'examen des mouvements du robot dans les différents films montre les performances suivantes :

Fonction	Critère	Niveau
Se déplacer sur un sol	Vitesse sur sol horizontal	25 km.h ⁻¹
	Accélération sur sol horizontal	20 m.s ⁻²
	Pente	30°

Partie 1 : Vérification de l'accélération maximale du Robot

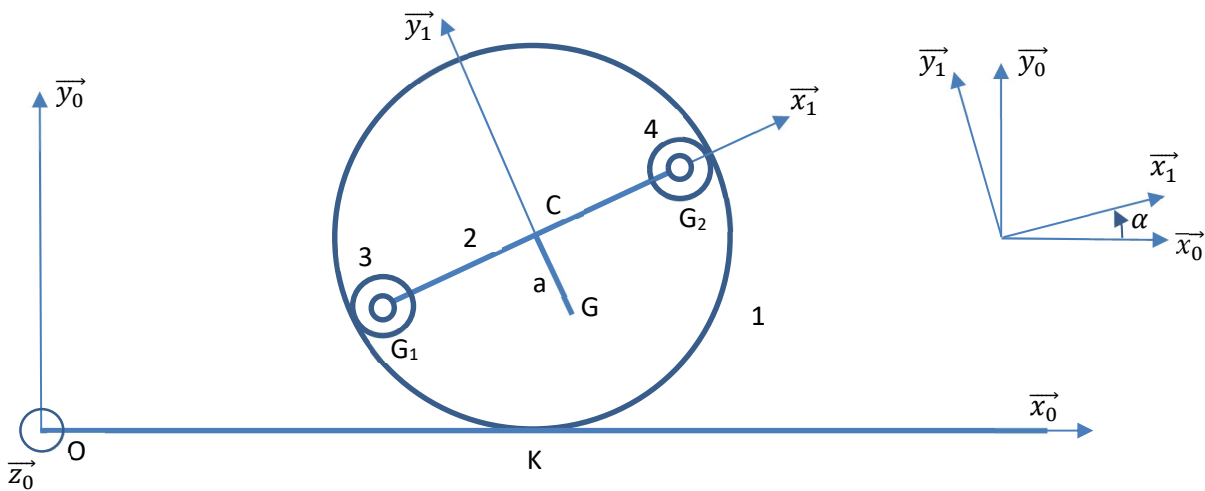
L'objectif de cette partie est de déterminer l'accélération maximale du robot sur un sol horizontal.

Modélisation :

Le robot est constitué des ensembles suivants :

- Une sphère 1 de rayon R , de masse M , de centre C et de moment d'inertie autour de l'axe (C, \vec{z}_0) noté I ;
- Un balancier 2 de masse m , de centre de gravité G et de moment d'inertie autour de l'axe (C, \vec{z}_0) noté J ; ce balancier est à l'intérieur de la sphère ; on note la distance $CG = a$; le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est attaché au balancier 2 ; on note l'angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- De galets motorisés 3 et 4 en liaison pivot parfaite d'axe respectifs (G_1, \vec{z}_0) et (G_2, \vec{z}_0) par rapport au balancier 2, de rayon r , dont on négligera l'inertie et le poids par rapport aux inerties et masse du balancier et de la sphère ; ces galets moteurs assurent le déplacement du robot, de manière similaire à un hamster dans sa roue ;

- Le sol 0 est muni d'un repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On paramètre la position du point C sous la forme $\vec{OC} = x \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_0$.
- La tête n'est pas considérée ici.



Hypothèses :

- Le référentiel muni du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est galiléen ;
- La gravité est $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$;
- On considère qu'il y a roulement sans glissement en K de la sphère 1 sur le sol 0.

1. Déterminer le torseur cinématique de la sphère 1 par rapport au sol 0 noté $\{V_{1/0}\}$ évalué au point C en fonction de x et de ses dérivées et des constantes du problème.

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R} & 0 \end{Bmatrix}_{C, (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

2. Déterminer le torseur cinématique du balancier 2 par rapport au sol 0 noté $\{V_{2/0}\}$ évalué au point C en fonction de x, α , de leurs dérivées et des constantes du problème.

$$\{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 \end{Bmatrix}_{C, (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

3. Déterminer le torseur cinématique du balancier 2 par rapport au sol 0 évalué au point G en fonction de x, α , de leur dérivées et des constantes du problème.

$$\{V_{2/0}\} = \{\dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \quad \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1\}_G$$

On isole l'ensemble E constitué par la sphère 1, le balancier 2 et les deux galets moteurs 3 et 4 : $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

4. Déterminer le torseur cinétique de E dans son mouvement par rapport à 0 noté $\{C_{E/0}\}$ évalué en C.

$$\{C_{E/0}\} = \left\{ M \cdot \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + m(\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + a \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1) \quad \left(J \dot{\alpha} - I \frac{\dot{x}}{R} + a \cdot m \cdot \dot{x} \cdot \cos \alpha \right) \cdot \vec{z}_0 \right\}_C$$

5. Déterminer le torseur dynamique de E dans son mouvement par rapport à 0 noté $\{D_{E/0}\}$ évalué en C.

$$\{D_{E/0}\} = \left\{ M \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 + m(\ddot{x} \cdot \vec{x}_0 + a \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + a \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1) \quad \left(J \ddot{\alpha} - I \frac{\ddot{x}}{R} + a \cdot m \cdot \ddot{x} \cdot \cos \alpha \right) \cdot \vec{z}_0 \right\}_C$$

6. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à E.

Poids de 1-M. $g. \vec{y}_0$ en C

- Poids $-m. g. \vec{y}_0$ en G

- Réaction du support en K : $N. \vec{y}_0 + T. \vec{x}_0$

7. Appliquer le Principe fondamental de la dynamique à l'ensemble E et donner l'équation liant x et ses dérivées successives et α et ses dérivées successives.

$$R. [(m + M)\ddot{x} - m. a. \dot{\alpha}^2. \sin\alpha + m. a. \ddot{\alpha}. \cos\alpha] - m. a. g. \sin\alpha = \left(J\ddot{\alpha} - I \frac{\ddot{x}}{R} + a. m. \dot{x}. \cos\alpha \right)$$

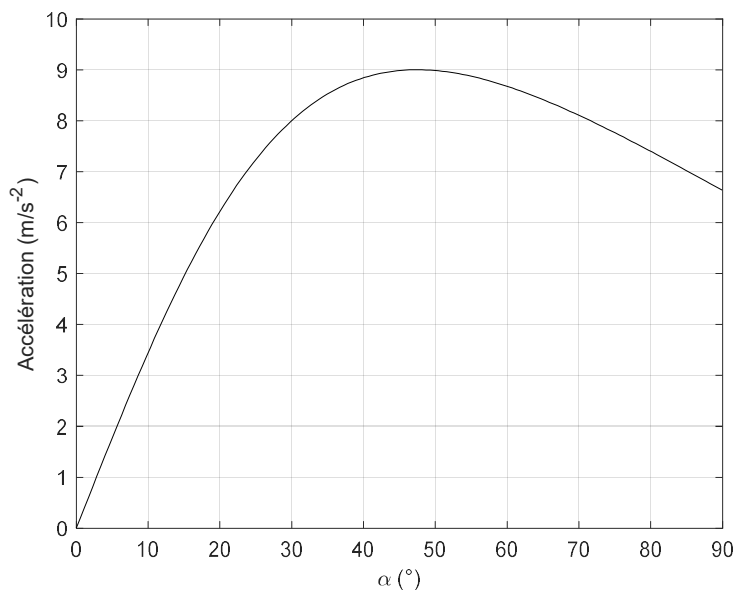
8. Montrer que l'équation précédente, dans le cas où α est constante, se met sous la forme :

$$\ddot{x} = \frac{m.a.g.\sin\alpha}{\frac{I}{R} + R.(m+M) - m.a.\cos\alpha}$$

9. Que se passerait-il, si à la conception, on avait choisi le point G confondu avec le point C ?

Si $a=0$, l'accélération du robot n'est possible que grâce à l'inertie du balancier.

La courbe suivante montre l'évolution de l'accélération du robot \ddot{x} en fonction de l'angle α .



10. Conclure sur le respect de l'exigence du cahier des charge. Comment résoudre se problème lors de la conception et diffusion du film ?

L'accélération du cahier des charges est impossible à atteindre, il faut accélérer les images pour obtenir l'illusion d'une accélération brutale.

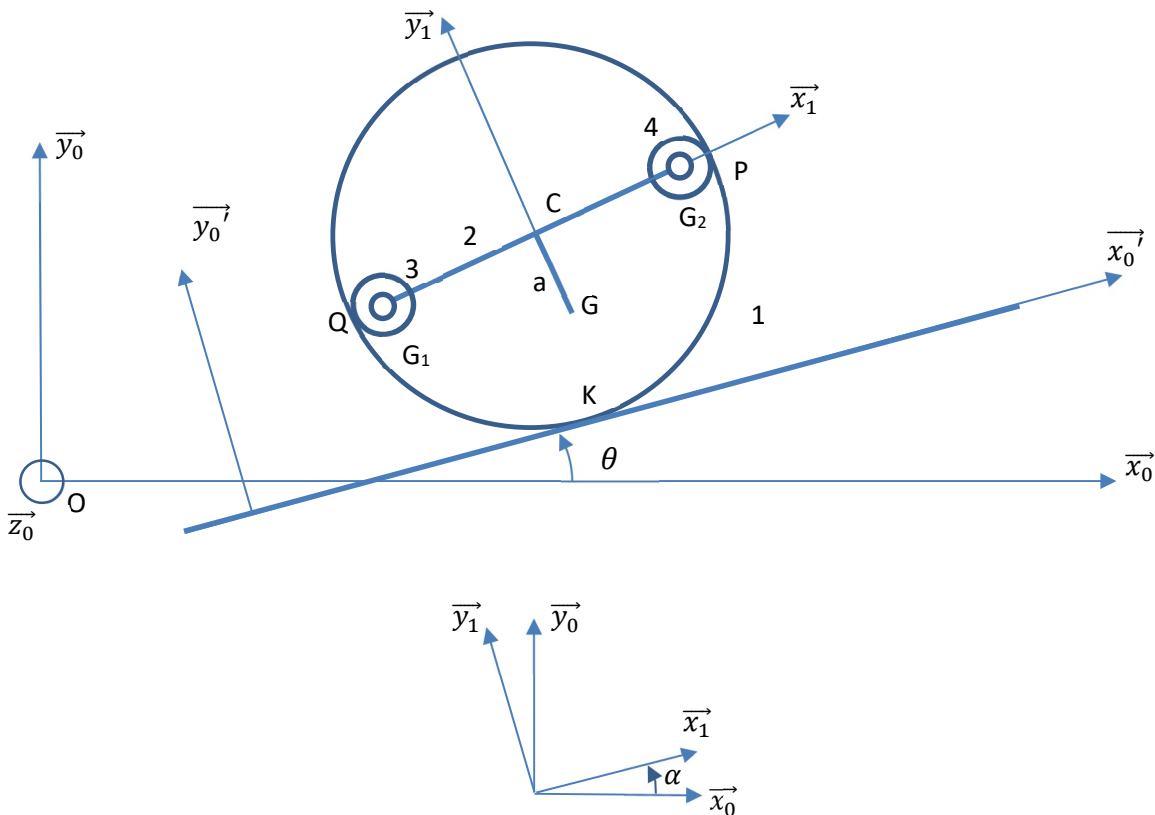
Partie 2 :

L'objectif de cette partie est de déterminer les couples qu'exercent les moteurs sur les galets G_1 et G_2 dans le cas de la montée d'un sol en pente formant un angle $\theta = 30^\circ$. Un vecteur unitaire dans la direction du sol est noté \vec{x}_0 . L'angle θ est tel que $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_0')$

On se place ici dans un cas quasi-statique. Les accélérations de tous les solides sont nulles et les vitesses constantes. L'angle α est constant.

On note $\vec{F}_{0 \rightarrow 1} = N \cdot \vec{x}_0 + T \cdot \vec{y}_0$, la force (glisseur) exercée par le sol 0 sur la sphère 1.

On note P et Q les points de contact entre les galets et le balancier. On note $\vec{F}_{1 \rightarrow 3} = N_3 \vec{x}_1 + T_3 \vec{y}_1$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 4} = -N_4 \vec{x}_1 + T_4 \vec{y}_1$ les forces (glisseurs) de contact exercées par la sphère 1 sur les galets respectifs 3 et 4. Les quantités N_3 et N_4 sont positifs et T_3 et T_4 sont algébriques.



11. Isoler l'ensemble E constitué par la sphère 1, le balancier 2 et les deux galets moteurs 3 et 4 : $E = \{1,2,3,4\}$, faire le bilan des actions mécaniques et écrire l'équation de moment en K.

$$M \cdot g \cdot R \cdot \sin\theta - m \cdot g \cdot (a \cdot \sin\alpha - R \cdot \sin\theta) = 0$$

12. Déterminer une relation entre α et θ .

$$(M + m) \cdot g \cdot R \cdot \sin\theta = m \cdot g \cdot a \cdot \sin\alpha$$

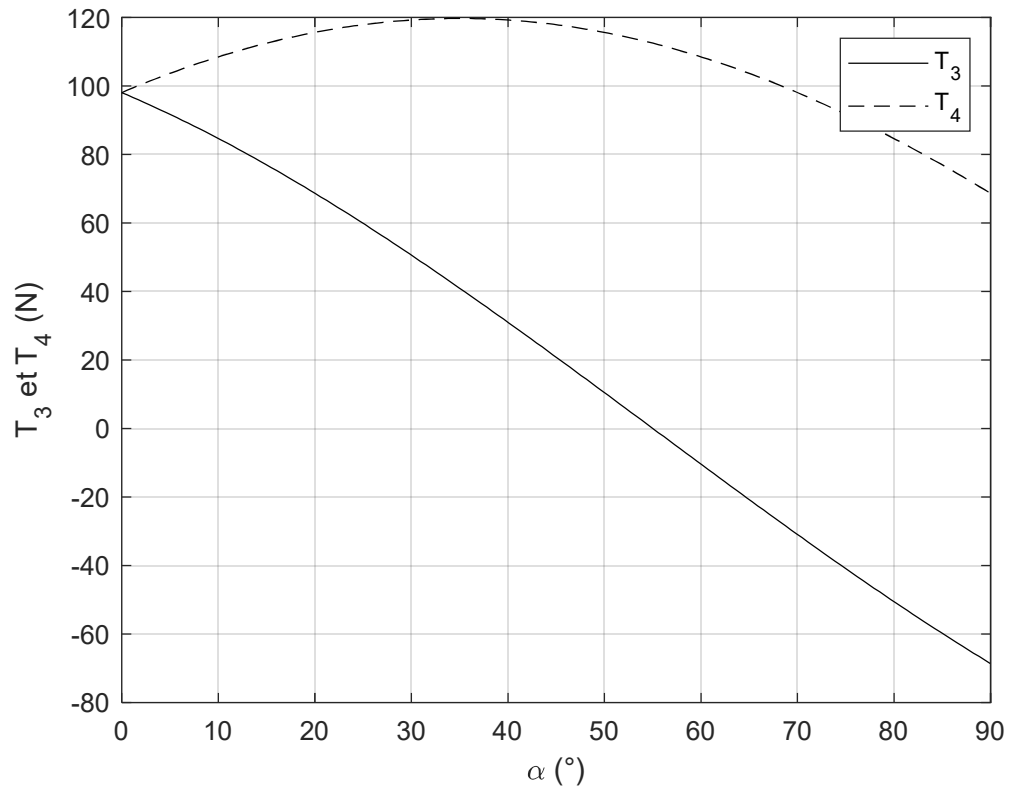
13. Faire l'application numérique en supposant que m est grand devant M et que $a = 0,7 R$.

$$\sin\alpha \approx 1/0,7, \text{ donc } \alpha \approx 45^\circ$$

14. Isoler le balancier 2 et les galets 3 et 4, appliquer le principe fondamental de la statique pour déterminer les composantes T_3 et T_4 .

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \left(\cos\alpha - \frac{a}{R} \sin\alpha \right) \text{ et } T_4 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \left(\cos\alpha + \frac{a}{R} \sin\alpha \right)$$

La figure suivante montre l'évolution de T_3 et T_4 en fonction de α .



15. En déduire les couples C_3 et C_4 exercés par les moteurs sur les galets 3 et 4 (de rayon $r=0,05$ m). Faire l'application numérique.

$$C_3 = -r.T_3 = -1 \text{ N.m} \text{ et } C_4 = r.T_4 = 6 \text{ N.m}$$

FIN DE L'ÉPREUVE