Concours CPGE EPITA/IPSA/ESME 2020

Corrigé de l'épreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

■ PARTIE I : ETUDE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

1°) *Résultats préliminaires*

a) La série géométrique $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et diverge grossièrement sinon.
La série entière suivante a donc pour rayon de convergence $R = 1$ et a pour somme si $|x| < 1$:

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ \dots \ = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

On sait qu'une série entière se dérive terme à terme sur $]-R, R[$, et la série-dérivée a même rayon de convergence. Les séries entières suivantes ont donc pour rayon de convergence $R = 1$ et :

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = S_0{}'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = S_1{}'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

b) On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} S_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2\,n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2\,n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

c) En exploitant les résultats de (a), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S_1\left(\frac{1}{2}\right) = 4\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = S_2\left(\frac{1}{2}\right) = 16.$$

On note alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}.$$

De cette dernière égalité résulte maintenant que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 16 + 8 = 24.$$

2°) *Calcul direct de l'espérance et de la variance de X*

a) D'après les résultats de convergence et les calculs de sommes de la question 1°, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

b) L'espérance de X, si elle existe, est la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,n\,\mathbb{P}(X=2\,n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\,n+1)\,\mathbb{P}(X=2\,n+1)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n+1}{2^{n+1}} \;=\; 2+\frac{5}{2} \;=\; \frac{9}{2}.$$

La convergence déjà établie de ces dernières séries implique la convergence des précédentes.
Ainsi donc, on a : $\mathbb{E}(X) = \frac{9}{2}$.

c) D'après les résultats précédents de la question 1°, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n)^2}{2^{n+1}} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} \;=\; 12.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)^2}{2^{n+1}} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n)^2}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \;=\; 12+4+\frac{1}{2} = \frac{33}{2}.$$

d) L'espérance de X^2, si elle existe, est la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2\,n)^2\,\mathbb{P}(X=2\,n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (2\,n+1)^2\,\mathbb{P}(X=2\,n+1)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n)^2}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)^2}{2^{n+1}} \;=\; 12+\frac{33}{2} \;=\; \frac{57}{2}.$$

On en déduit que : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{57}{2} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$.

3°) *Calcul de l'espérance de X à l'aide d'une fonction auxiliaire*

a) On peut reconnaître dans la série proposée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2^n}$ une série géométrique de raison $\frac{x^2}{2}$.
Ainsi, elle converge absolument pour $x^2 < 2$ ou $|x| < \sqrt{2}$ et diverge grossièrement sinon.
Son rayon de convergence est $R = \sqrt{2}$ (ce qu'on peut aussi obtenir par la règle d'Alembert) et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2^n} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \;=\; S_0\!\left(\frac{x^2}{2}\right) \;=\; \frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}} \;=\; \frac{x^2}{2-x^2}.$$

b) Compte tenu du résultat obtenu ci-dessus, le calcul suivant donne à la fois la convergence de la série suivante pour $|x| < \sqrt{2}$ et sa somme :

$$G(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,x^n \;=\; \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,x^n \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2\,n)\,x^{2\,n} \;=\; +\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2\,n+1)\,x^{2\,n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n+1}}{2^{n+1}} \;=\; \frac{x+1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{2^{n+1}} \;=\; \frac{x+1}{2}\,\frac{x^2}{2-x^2} \;=\; \frac{x^3+x^2}{2\left(2-x^2\right)}.$$

c) On sait qu'on peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle de convergence.
Pour $|x| < \sqrt{2}$, on a donc :

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X = n)\,x^{n-1} = \frac{4\,x + 6\,x^2 - x^4}{2\left(2 - x^2\right)^2}.$$

En faisant $x = 1$, on obtient : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X = n) = \frac{9}{2}$, ce qu'on avait déjà obtenu.

d) De même, on peut redériver terme à terme la série entière sur son intervalle de convergence.
Pour $|x| < \sqrt{2}$, on a donc :

$$G''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(X = n)\,x^{n-1}.$$

En faisant $x = 1$, on obtient donc : $G''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X(X-1))$.
Cette dernière égalité résulte en effet du théorème de transfert, et comme $G''(1) = 24$, on a :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X) = 24.$$

On en déduit : $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 24 + \frac{9}{2} = \frac{57}{2}$, et on retrouve de même $\mathbb{V}(X)$.

■ PARTIE II : ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

4°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

a) D'après les règles de la marche aléatoire, on a $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) = 0$ puisqu'on ne peut aller depuis l'origine O à un point du bord en une seule étape.

Selon les mêmes règles, on a $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$ puisque :

- à partir de tout point noté 1, un seul chemin sur quatre conduit à un point noté B,
- à partir de tout point noté 2, deux chemins sur quatre conduisent à un point noté B.

Enfin, $\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) = 1$ puisqu'une fois parvenu en un point du bord, on y reste.

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet formé des événements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = B)$, ce qui conduit successivement à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = B) = {} & \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) \\ & + \mathbb{P}(X_n = 2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) + \mathbb{P}(X_n = B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) \\ = {} & \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = B).\end{aligned}$$

b) De même, les règles de la marche aléatoire conduisent à :

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0,\ \ \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2},\ \ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0,\ \ \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2) = 0.$$

A nouveau, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = {} & \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) \\ & + \mathbb{P}(X_n = 2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2) \\ = {} & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 1).\end{aligned}$$

c) En procédant de même, on obtient encore :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \ & \mathbb{P}(X_n=0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(X_n=1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\\ & +\mathbb{P}(X_n=2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(X_n=B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=1)\\ & =\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \ & \mathbb{P}(X_n=0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)+\mathbb{P}(X_n=1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)\\ & +\mathbb{P}(X_n=2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)+\mathbb{P}(X_n=B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=0)\\ & =\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1).\end{aligned}$$

d) En regroupant ces résultats, on obtient donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1}=0)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=B)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/4&0&0\\1&0&1/2&0\\0&1/2&0&0\\0&1/4&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\\ \mathbb{P}(X_n=2)\\ \mathbb{P}(X_n=B)\end{pmatrix}.$$

5°) *Diagonalisation de la matrice M*

a1) Le vecteur propre U_1 associé à $\lambda=1$ de dernière composante égale à 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix}0&1/4&0&0\\1&0&1/2&0\\0&1/2&0&0\\0&1/4&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}.$$

On résout donc : $x-\frac{y}{4}=0,\ x-y+\frac{z}{2}=0,\ \frac{y}{2}-z=0,\ \frac{y}{4}+\frac{z}{2}=0.$

On en déduit que les composantes de U_1 sont $(0, 0, 0, 1)$.

a2) le vecteur propre U_2 associé à $\lambda=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ de dernières composantes $-6+4\sqrt{2}$ et 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix}0&1/4&0&0\\1&0&1/2&0\\0&1/2&0&0\\0&1/4&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\-6+4\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x\\y\\-6+4\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{4}=0,\ x-\frac{y}{\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2},\ \frac{y}{2}=4-3\sqrt{2},\ \frac{y}{4}=2-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

On en déduit que les composantes de U_2 sont $\left(-3+2\sqrt{2},\ 8-6\sqrt{2},\ -6+4\sqrt{2},\ 1\right)$.

a3) le vecteur propre U_3 associé à $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ de dernières composantes $-6-4\sqrt{2}$ et 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix}0&1/4&0&0\\1&0&1/2&0\\0&1/2&0&0\\0&1/4&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\-6-4\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x\\y\\-6-4\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{4}=0,\ x_1+\frac{y}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2},\ \frac{y}{2}=4+3\sqrt{2},\ \frac{y}{4}=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

On en déduit que les composantes de U_3 sont $\left(-3-2\sqrt{2},\ 8+6\sqrt{2},\ -6-4\sqrt{2},\ 1\right)$.

a4) le vecteur propre U_4 associé à $\lambda = 0$ de dernière composante 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{y}{4} = 0$, $x + \frac{z}{2} = 0$, $\frac{y}{2} = 0$, $\frac{y}{4} + \frac{z}{2} = -1$.

On en déduit que les composantes de U_4 sont $(1, 0, -2, 1)$.

b) La matrice M étant d'ordre 4 et ayant 4 valeurs propres réelles distinctes est diagonalisable.
De plus, une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de M est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt la relation : $D = P^{-1}\, M\, P$ avec $D = \mathrm{Diag}\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

6°) *Lois des variables aléatoires X_n*

a) D'après les règles de la marche aléatoire, les composantes de V_0 sont $(1, 0, 0, 0)$.
D'après la question 4°, on a $V_{n+1} = M\, V_n$, d'où par récurrence immédiate $V_n = M^n\, V_0$.
D'après la question 5°, on a $M = P\, D\, P^{-1}$, d'où $V_n = \left(P\, D\, P^{-1}\right)^n V_0 = P\, D^n\, P^{-1}\, V_0$.

b) Comme les composantes de V_0 sont 1, 0, 0, 0, le système $P\, X = V_0$ s'écrit :

$$\left|\begin{array}{rcl} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 + x_4 & = & 1 \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 & = & 0 \\ \left(-6+4\sqrt{2}\right)x_2 - \left(6+4\sqrt{2}\right)x_3 - 2\,x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

En retirant 2 fois (1) à (3), on obtient : $2\,x_4 = 1$ et $x_4 = \frac{1}{2}$, ce qui ramène au système suivant :

$$\left|\begin{array}{rcl} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 & = & \frac{1}{2} \\ \left(4-3\sqrt{2}\right)x_2 + \left(4+3\sqrt{2}\right)x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$, et il reste alors $x_1 = 1$.

c) Comme l'égalité $P\, X = V_0$ est équivalente à l'égalité $X = P^{-1}\, V_0$, on en déduit aussitôt que les composantes du vecteur $P^{-1}\, V_0$ sont 1, $-\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{2}$.

La relation $V_n = P\,D^n\,P^{-1}\,V_0$ s'écrit maintenant avec $n \geq 1$ (pour avoir $0^n = 0$) :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit, toujours pour $n \geq 1$, à :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4\left(\sqrt{2}\right)^n} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4\left(-\sqrt{2}\right)^n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un dernier produit matriciel donne enfin pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

d) On observe que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ pour $n \geq 1$, et que :

$$\forall\, n \geq 1,\quad \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\forall\, n \geq 1,\quad \mathbb{P}(X_{2n} = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}.$$

On vérifie par ailleurs la formule proposée pour $\mathbb{P}(X_n = B)$, et on observe, quand n tend vers $+\infty$, que sa limite est donc égale à 1.

7°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

a) Pour tout entier $n \geq 1$, l'événement $T \leq n$ signifie que l'individu a atteint le bord du carré avant l'instant n (au sens large), ce qui signifie de façon équivalente que l'événement $X_n = B$ est réalisé. On a donc $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Compte tenu de $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = 1$ obtenu en 6°, il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T \leq n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = 1.$$

c) L'événement $T = 2n$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} \neq B$, autrement dit si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} = 1$ ou 2. Comme on a vu que $X_{2n-1} = 2$ est impossible, l'événement $T = 2n$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} = 1$, soit :

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \mathbb{P}((X_{2n} = B) \bigcap (X_{2n-1} = 1)) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)\, \mathbb{P}_{X_{(2n-1}=1)}(X_{2n} = B) = \frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

d) De même, l'événement $\mathbb{P}(T = 2n+1)$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} \neq B$, autrement dit si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} = 1$ ou 2. Comme on a vu que $X_{2n} = 1$ est impossible, l'événement $T = 2n+1$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} = 2$, soit :

$$\mathbb{P}(T = 2n+1) = \mathbb{P}((X_{2n+1} = B) \bigcap (X_{2n} = 2)) = \mathbb{P}(X_{2n} = 2)\, \mathbb{P}_{(X_{2n}=2)}(X_{2n+1} = B) = \frac{1}{2^{n}}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc $\mathbb{P}(T = 2n) = \mathbb{P}(T = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

e) La loi de la variable aléatoire T n'est autre que celle de la variable aléatoire X de la partie I.
On en déduit que $\mathbb{E}(T) = \frac{9}{2}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{33}{4}$.