Concours CPGE EPITA/IPSA/ESME 2020

Corrigé de l'épreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE (Partie I)

1°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

a) D'après les règles de la marche aléatoire, on a $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$.

En effet, à partir de tout point noté 1, un seul chemin sur quatre conduit à un point noté B.

Et à partir de tout point noté 2, deux chemins sur quatre conduisent à un point noté B.

b) De même, on obtient $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}$.

c) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet formé des événements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = B)$, ce qui conduit successivement à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)\\ &\quad +\mathbb{P}(X_n = 2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 0)\\ &= \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(X_n = 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)\\ &\quad +\mathbb{P}(X_n = 2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)\\ &\quad +\mathbb{P}(X_n = 2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = B) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\,\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) + \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B)\\ &\quad +\mathbb{P}(X_n = 2)\,\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) + \mathbb{P}(X_n = B)\,\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B)\\ &= \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = B).\end{aligned}$$

d) Il en résulte qu'on a pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}\,(X_{n+1} = 0)\\ \mathbb{P}\,(X_{n+1} = 1)\\ \mathbb{P}\,(X_{n+1} = 2)\\ \mathbb{P}\,(X_{n+1} = B)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}\,(X_n = 0)\\ \mathbb{P}\,(X_n = 1)\\ \mathbb{P}\,(X_n = 2)\\ \mathbb{P}\,(X_n = B)\end{pmatrix}.$$

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a1) Le vecteur propre U_1 associé à $\lambda = 1$ de dernière composante égale à 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $x_1 - \frac{x_2}{4} = 0$, $x_1 - x_2 + \frac{x_3}{2} = 0$, $\frac{x_2}{2} - x_3 = 0$, $\frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 0$.

On en déduit que les composantes de U_1 sont $(0, 0, 0, 1)$.

a2) le vecteur propre U_2 associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ de dernières composantes $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{4} = 0$, $x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$, $\frac{x_2}{2} = 4 - 3\sqrt{2}$, $\frac{x_2}{4} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

On en déduit que les composantes de U_2 sont $\left(-3 + 2\sqrt{2}, 8 - 6\sqrt{2}, -6 + 4\sqrt{2}, 1\right)$.

a3) le vecteur propre U_3 associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ de dernières composantes $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -6-4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -6-4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{4} = 0$, $x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$, $\frac{x_2}{2} = 4 + 3\sqrt{2}$, $\frac{x_2}{4} = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

On en déduit que les composantes de U_3 sont $\left(-3 - 2\sqrt{2}, 8 + 6\sqrt{2}, -6 - 4\sqrt{2}, 1\right)$.

a4) le vecteur propre U_4 associé à $\lambda = 0$ de dernière composante 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x_2}{4} = 0$, $x_1 + \frac{x_3}{2} = 0$, $\frac{x_2}{2} = 0$, $\frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = -1$.

On en déduit que les composantes de U_4 sont $(1, 0, -2, 1)$.

b) La matrice M étant d'ordre 4 et ayant 4 valeurs propres réelles distinctes est diagonalisable.
De plus, une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de M est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt la relation : $D = P^{-1}\, M\, P$ avec $D = \mathrm{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

3°) *Lois des variables aléatoires X_n*

a) D'après les règles de la marche aléatoire, les composantes de V_0 sont (1, 0, 0, 0).

D'après la question 1°, on a $V_{n+1} = M\, V_n$, d'où par récurrence immédiate $V_n = M^n\, V_0$.

D'après la question 2°, on a $M = P\, D\, P^{-1}$, d'où $V_n = \left(P\, D\, P^{-1}\right)^n V_0 = P\, D^n\, P^{-1}\, V_0$.

b) Comme les composantes de V_0 sont 1, 0, 0, 0, le système $P\, X = V_0$ s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 + x_4 = 1 \\ \left(8-6\sqrt{2}\right)x_2 + \left(8+6\sqrt{2}\right)x_3 = 0 \\ \left(-6+4\sqrt{2}\right)x_2 - \left(6+4\sqrt{2}\right)x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right.$$

En retirant 2 fois (1) à (3), on obtient : $2\,x_4 = 1$ et $x_4 = \frac{1}{2}$, ce qui ramène au système suivant :

$$\left|\begin{array}{l} \left(-3+2\sqrt{2}\right)x_2 - \left(3+2\sqrt{2}\right)x_3 = \frac{1}{2} \\ \left(4-3\sqrt{2}\right)x_2 + \left(4+3\sqrt{2}\right)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$, et il reste alors $x_1 = 1$.

Ainsi, les composantes du vecteur $X = P^{-1}\, V_0$ sont $1, -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}$.

c) La relation $V_n = P\, D^n\, P^{-1}\, V_0$ s'écrit maintenant avec $n \geq 1$ (pour avoir $0^n = 0$) :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit, toujours pour $n \geq 1$, à :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4\left(\sqrt{2}\right)^n} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4\left(-\sqrt{2}\right)^n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un dernier produit matriciel donne enfin pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Et on retrouve la formule proposée pour $\mathbb{P}(X_n = B)$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

d) On observe que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ pour $n \geq 1$, et que :

$$\forall\, n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} \;=\; \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\forall\, n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_{2n} = 2) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \;=\; \frac{1}{2^n}.$$

4°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

a) Pour tout entier $n \geq 1$, l'événement $T \leq n$ signifie que l'individu a atteint le bord du carré avant l'instant n, ce qui signifie de façon équivalente que l'événement $X_n = B$ est réalisé.

On a donc $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$, et compte tenu de $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = 1$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T = k) \;=\; \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T \leq n) \;=\; \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = B) \;=\; 1.$$

b) L'événement $T = 2n$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} \neq B$, autrement dit si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} = 1$ ou 2. Comme on a vu que $X_{2n-1} = 2$ est impossible, l'événement $T = 2n$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} = 1$, soit :

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \mathbb{P}((X_{2n} = B) \bigcap (X_{2n-1} = 1)) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)\, \mathbb{P}_{(X_{2n-1}=1)}(X_{2n} = B) = \frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

c) De même, l'événement $\mathbb{P}(T = 2n + 1)$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} \neq B$, autrement dit si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} = 1$ ou 2. Comme on a vu que $X_{2n} = 1$ est impossible, l'événement $T = 2n + 1$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} = 2$, soit :

$$\mathbb{P}(T = 2n + 1) = \mathbb{P}((X_{2n+1} = B) \bigcap (X_{2n} = 2)) = \mathbb{P}(X_{2n} = 2)\, \mathbb{P}_{(X_{2n}=2)}(X_{2n+1} = B) = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc $\mathbb{P}(T = 2n) = \mathbb{P}(T = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

d) L'espérance de la variable aléatoire T est alors facile à calculer :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, \mathbb{P}(T = 2n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n + 1)\, \mathbb{P}(T = 2n + 1).$$

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Connaissant les sommes de la série géométrique et de sa dérivée lorsqu'elles convergent, il vient :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \;=\; 4 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{9}{2}.$$

L'individu doit donc effectuer 4,5 pas en moyenne pour parvenir au bord du carré $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE (Partie II)

5°) *Etude d'une suite de variables aléatoires* (Y_n)

Avec les nouvelles règles de la marche aléatoire, la formule des probabilités totales donne pour tout $i \in \{0, 1, 2, 2\,B, 3, 4\}$ le résultat suivant pour $\mathbb{P}(Y_{n+1} = i)$:

$$\mathbb{P}(Y_n = 0)\,\mathbb{P}_{(Y_n=0)}(Y_{n+1} = i) + \mathbb{P}(Y_n = 1)\,\mathbb{P}_{(Y_n=1)}(Y_{n+1} = i) + \mathbb{P}(Y_n = 2)\,\mathbb{P}_{(Y_n=2)}(Y_{n+1} = i) +$$
$$\mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B})\,\mathbb{P}_{(Y_n=2\,\mathrm{B})}(Y_{n+1} = i) + \mathbb{P}(Y_n = 3)\,\mathbb{P}_{(Y_n=3)}(Y_{n+1} = i) + \mathbb{P}(Y_n = 4)\,\mathbb{P}_{(Y_n=4)}(Y_{n+1} = i).$$

b) En écrivant cette relation pour $i \in \{0, 1, 2, 2\,\mathrm{B}, 3, 4\}$, il vient alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2\,\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 3) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_n = 0) \\ \mathbb{P}(Y_n = 1) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B}) \\ \mathbb{P}(Y_n = 3) \\ \mathbb{P}(Y_n = 4) \end{pmatrix}.$$

c) Si V_n est le vecteur dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2\,\mathrm{B})$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$, $\mathbb{P}(Y_n = 4)$, on a, compte tenu de la relation $V_{n+1} = M\,V_n$ établie ci-dessus :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{12} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} V_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{48} \\ 0 \\ \frac{31}{72} \\ \frac{41}{144} \\ 0 \\ \frac{5}{36} \end{pmatrix}.$$

Et le calcul des 5 dernières composantes du vecteur V_4 est évidemment inutile pour avoir $\mathbb{P}(Y_4 = 0)$.

On en déduit en observant les premières composantes de ces vecteurs :

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0, \quad \mathbb{P}(Y_2 = 0) = 1/4, \quad \mathbb{P}(Y_3 = 0) = 0, \quad \mathbb{P}(Y_4 = 0) = 7/48.$$

6°) *Calcul des probabilités* $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ *de passage à l'origine*

a) Si les 6 valeurs propres de M sont $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$, celle-ci est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à 0 a pour dimension 2, l'ordre de multiplicité de 0.

Or un vecteur de composantes $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ appartient au sous-espace propre associé à 0, autrement dit au noyau de M, si et seulement si :

$$x_2 = 0,\ x_1 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{3} = 0,\ \frac{x_2}{2} + \frac{x_5}{3} = 0,\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_5}{3} = 0,\ \frac{x_3}{2} + \frac{2\,x_4}{3} + x_6 = 0,\ x_5 = 0.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$x_2 = x_5 = 0,\ x_1 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{3} = 0,\ \frac{x_3}{2} + \frac{2\,x_4}{3} + x_6 = 0.$$

Ker(M) est donc l'intersection de 4 hyperplans de $\mathbb{R}^6$, c'est un plan dont une base est par exemple :

$$v_1 = (1, 0, -2, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad v_2 = (1, 0, -4, 3, 0, 0).$$

Ainsi, Ker(M) est de dimension 2 et M est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$.

b) Si P est une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$, alors on sait que $D = P^{-1}\,M\,P$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la base des vecteurs propres choisis, c'est à dire $D = \mathrm{Diag}\left(1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $V_{n+1} = M\,V_n$, d'où $V_n = M^n\,V_0 = \left(P\,D\,P^{-1}\right)^n V_0 = P\,D^n\,P^{-1}\,V_0$.

Et en notant la matrice $P = \left(p_{i\,j}\right)$ et le vecteur $P^{-1}\,V_0 = (q_i)$, il vient alors pour $n \geq 1$:

$$V_n = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}.$$

$$V_n = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ (-1)^n\,q_2 \\ \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n q_3 \\ \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n q_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les composantes du vecteur V_n, en particulier la première qui est $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, apparaissent alors après calcul comme des combinaisons linéaires de 1, $(-1)^n$, $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n$ et $\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n$.

Il existe donc des réels α, β, γ, δ tels que :

$$\forall\, n \geq 1 \ : \ \mathbb{P}(Y_n = 0) \ = \ \alpha + \beta(-1)^n + \gamma\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n + \delta\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^n.$$

c) On a observé à la question 5° que :

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0, \quad \mathbb{P}(Y_2 = 0) = 1/4, \quad \mathbb{P}(Y_3 = 0) = 0, \quad \mathbb{P}(Y_4 = 0) = 7/48.$$

En reportant dans l'expression précédente de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, on obtient le système :

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) \ = \ \alpha - \beta + (\gamma - \delta)\,\frac{\sqrt{11}}{6} \ = \ 0$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = 0) \ = \ \alpha + \beta + (\gamma + \delta)\,\frac{11}{36} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Y_3 = 0) \ = \ \alpha - \beta + (\gamma - \delta)\,\frac{11\sqrt{11}}{216} \ = \ 0$$

$$\mathbb{P}(Y_4 = 0) \ = \ \alpha + \beta + (\gamma + \delta)\,\frac{121}{1296} \ = \ \frac{7}{48}$$

Les équations (1) et (3) donnent $\alpha = \beta$ et $\gamma = \delta$, puis (2) et (4) donnent $\alpha = \frac{1}{20}$ et $\gamma = \frac{27}{110}$.

On retrouve que $\mathbb{P}(Y_{2n+1} = 0) = 0$, et on obtient aussi :

$$\forall\, n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y_{2n} = 0) \ = \ \frac{1}{10} + \frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^n.$$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_{2n} = 0) = \frac{1}{10}$, ce qui signifie qu'aux instants pairs, l'individu passe asymptotiquement 10% de son temps à l'origine 0.

7°) *Nombre moyen de passages en 0 à l'instant 2n*

a) Pour tout entier $k \geq 0$, O_{2k} est la variable aléatoire valant 1 si l'individu est en 0 à l'instant $2k$ et 0 sinon, de sorte que $S_{2n} = O_2 + O_4 + \ \dots \ + O_{2n} = \sum_{k=1}^n O_{2k}$ indique le nombre de passages en 0 de l'individu entre l'instant 1 et l'instant $2n$.

b) Notons que O_{2k} est une variable aléatoire de Bernoulli, d'espérance : $\mathbb{P}(O_{2k} = 1) = \mathbb{P}(Y_{2k} = 0)$.
Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(S_{2n}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(O_{2k})$, ce qui conduit pour $n \geq 1$ à :

$$\mathbb{E}(S_{2n}) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y_{2k} = 0) \ = \ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10} + \frac{27}{55}\left(\frac{11}{36}\right)^k\right) \ = \ \frac{n}{10} + \frac{27 \times 11}{55 \times 36}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{11}{36}\right)^k.$$

D'où, par sommation partielle de cette série géométrique :

$$\mathbb{E}(S_{2n}) \ = \ \frac{n}{10} + \frac{27 \times 11}{55 \times 36}\,\frac{1 - \left(\frac{11}{36}\right)^n}{1 - \frac{11}{36}} \ = \ \frac{n}{10} + \frac{27}{125}\left(1 - \left(\frac{11}{36}\right)^n\right).$$

Autrement dit, l'espérance du nombre de passages en 0 entre les instants 1 et $2n$ est :

$$\mathbb{E}(S_{2n}) \ = \ \frac{n}{10} + \frac{27}{125} + o(1).$$

8°) *Probabilités-limites des positions occupées par l'individu lorsque n tend vers* $+\infty$

a) Un vecteur propre de M associé à $\lambda = 1$ vérifie $M\ X = X$, d'où :

$$\frac{x_2}{4} = x_1,\ x_1 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{3} = x_2,\ \frac{x_2}{2} + \frac{x_5}{3} = x_3,\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_5}{3} = x_4,\ \frac{x_3}{2} + \frac{2\,x_4}{3} + x_6 = x_5,\ \frac{x_5}{3} = x_6.$$

Si sa 1ère composante est 1, on a donc :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{3} = 3,\ x_3 - \frac{x_5}{3} = 2,\ x_4 - \frac{x_5}{3} = 1,\ \frac{x_4}{3} - \frac{2\,x_5}{3} = -3,\ x_5 = 3\,x_6.$$

Ce qui conduit facilement au vecteur (1, 4, 4, 3, 6, 2).

b) Un vecteur propre de M associé à $\lambda = -1$ vérifie $M\ X = -X$, d'où :

$$\frac{x_2}{4} = -x_1,\ x_1 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{3} = -x_2,\ \frac{x_2}{2} + \frac{x_5}{3} = -x_3,\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_5}{3} = -x_4,\ \frac{x_3}{2} + \frac{2\,x_4}{3} + x_6 = -x_5,\ \frac{x_5}{3} = -x_6.$$

Si sa 1ère composante est 1, on a donc :

$$x_1 = 1,\ x_2 = -4,\ \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{3} = 3,\ x_3 + \frac{x_5}{3} = 2,\ x_4 + \frac{x_5}{3} = 1,\ \frac{x_4}{3} + \frac{2\,x_5}{3} = -3,\ x_5 = -3\,x_6.$$

Ce qui conduit facilement au vecteur (1, −4, 4, 3, −6, 2).

c) Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ à une base de vecteurs propres de M dont les 1ère et 2ème colonnes sont formées des vecteurs propres obtenus ci-dessus en a) et b), et les colonnes suivantes de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\frac{\sqrt{11}}{6}$, $-\frac{\sqrt{11}}{6}$, 0, 0, on a (sans préciser davantage ces quatre derniers vecteurs propres) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * & * & * \\ 4 & -4 & * & * & * & * \\ 4 & 4 & * & * & * & * \\ 3 & 3 & * & * & * & * \\ 6 & -6 & * & * & * & * \\ 2 & 2 & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Enfin, comme M est diagonalisable, on a $D = P^{-1}\ M\ P$ où $D = \mathrm{Diag}\left(1,\ -1,\ \frac{\sqrt{11}}{6},\ -\frac{\sqrt{11}}{6},\ 0,\ 0\right)$.

d) On sait d'après la question 6° que $V_n = P\,D^n\,P^{-1}\ V_0$ pour tout entier naturel n.

Il en résulte que $V_{2\,n} = P\,D^{2\,n}\,P^{-1}\ V_0$ et par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} V_{2\,n} = P \lim_{n \to +\infty} D^{2\,n}\,P^{-1}\ V_0.$$

Comme $\lim D^{2\,n} = \mathrm{Diag}(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, un calcul explicite donne facilement, compte tenu des informations données sur la solution $X = P^{-1}\ V_0$ du système $P\,X = V_0$:

$$\lim_{n \to +\infty} V_{2\,n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * & * & * \\ 4 & -4 & * & * & * & * \\ 4 & 4 & * & * & * & * \\ 3 & 3 & * & * & * & * \\ 6 & -6 & * & * & * & * \\ 2 & 2 & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}.$$

Et finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} V_{2n} = \lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{2n} = 0) \\ \mathbb{P}(Y_{2n} = 1) \\ \mathbb{P}(Y_{2n} = 2) \\ \mathbb{P}(Y_{2n} = 2B) \\ \mathbb{P}(Y_{2n} = 3) \\ \mathbb{P}(Y_{2n} = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \\ 0 \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, l'individu se trouve à l'instant $2n$ en 0 avec la probabilité 10%, en 2 avec la probabilité 40%, en 2B avec la probabilité 30%, et en 4 avec la probabilité 20%.

Et comme $\lim D^{2n+1} = \mathrm{Diag}(1, -1, 0, 0, 0, 0)$, un calcul explicite du même type donne de même :

$$\lim_{n \to +\infty} V_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{2n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(Y_{2n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(Y_{2n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(Y_{2n+1} = 2B) \\ \mathbb{P}(Y_{2n+1} = 3) \\ \mathbb{P}(Y_{2n+1} = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{10} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6}{10} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, l'individu se trouve à l'instant $2n+1$ en 1 avec la probabilité 40% et en 3 avec la probabilité 60%.