I Mouvement du centre de masse de la lune

I.1 Référentiel de Copernic : centré sur le centre de masse du système solaire, axes dirigées vers des étoiles lointaine. Galiléen pour des expériences courte devant la période de rotation du système solaire autour du centre de la galaxie.
Référentiel géocentrique : centré sur le centre de la Terre, mêmes axes que celui de Copernic. Galiléen pour des expériences courtes devant une année.
Référentiel terrestre : lié à la Terre, galiléen pour des expériences courtes devant un jour.

I.2 $\overrightarrow{F_g} = \frac{Gm_Lm_T}{||\overrightarrow{TL}||^3}\overrightarrow{LT} = -\frac{Gm_Tm_L}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

I.3 La seule force étant centrale, le moment cinétique $\overrightarrow{\mathscr{L}_T}$ se conserve, donc $\forall t$, $\overrightarrow{TL}$ et $\overrightarrow{v}$ sont toujours perpendiculaires à un vecteur constant, ce qui définit un plan.

I.4 $\overrightarrow{\mathscr{L}_T}$ est constant, et $\overrightarrow{\mathscr{L}_T} = m_LC\overrightarrow{e_z}$, donc C se conserve.

I.5 2ème loi de Kepler : l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{TL}$ par unité de temps est une constante. Avec un schéma, on peut montrer que cette vitesse aréolaire vaut $C/2$.

I.6 $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{C}{r}\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{\mathscr{L}_T} = m_LC\overrightarrow{e_z}$

I.7 dériver et utiliser le PFD pour simplifier le terme $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$

I.8 $\overrightarrow{e} = \left(\frac{C^2}{rGm_T} - 1\right)\overrightarrow{e_r} - \frac{C\dot{r}}{Gm_T}\overrightarrow{e_\theta}$, ainsi $\overrightarrow{e}.\overrightarrow{TL} = ||\overrightarrow{e}||r\cos\theta = \left(\frac{C^2}{rGm_T} - 1\right)r$
On en déduit $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e = ||\overrightarrow{e}||$ et $p = \frac{C^2}{Gm_T}$.
$\overrightarrow{e}$ est appelé vecteur excentricité car sa norme est l'excentricité de l'orbite elliptique, et sa direction suivant le grand axe.

I.9 Apogée : point de l'orbite le plus éloigné de l'astre attracteur. périgée : le moins éloigné.

I.10 $r_A = max(r) = \frac{p}{1-e}$ et $r_p = min(r) = \frac{p}{1+e}$, on en déduit $e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$ et $p = \frac{2r_Pr_A}{r_A + r_P}$.
A.N. : $e = 6,54.10^{-2}$ $p = 3,80.10^8$ m et $C = \sqrt{pGm_T} = 3,89.10^{11}$ $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

I.11 L'aire balayée par unité de temps est $\frac{C}{2} = \frac{\mathscr{A}}{T_L}$, donc $\frac{C^2}{4} = \frac{\mathscr{A}^2}{T_L^2}$.
Sachant que $\mathscr{A}^2 = a^3p$ et $p = C^2/(Gm_T)$, il vient $\frac{a^3}{T_L^2} = \frac{Gm_T}{4\pi^2}$

I.12 D'après la 3ème loi de Kepler montrée précédemment, $T_L = \sqrt{(4\pi a^3)/(Gm_T)}$. l'A.N. donne $T_L = 27,2$ j, sensiblement égale à la donnée de l'énonce.

I.13 $E_p(r) = -\frac{Gm_Tm_L}{r}$

I.14 $E_c = \frac{m_L}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{m_L}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)$

I.15 $E_m = E_c + E_p = \frac{m_L}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{Gm_Tm_L}{r}$.
Dans le référentiel géocentrique, la Lune n'est soumise qu'à $\overrightarrow{F_g}$ qui est une force conservative, donc E_m est une constante.

I.16 quand $r = r_A$ ou $r = r_p$, $\dot{r} = 0$. On peut donc écrire
$E_m = \frac{m_LC^2}{2r_A^2} - \frac{Gm_Tm_L}{r_A}$ (1) et $E_m = \frac{m_LC^2}{2r_P^2} - \frac{Gm_Tm_L}{r_P}$ (2)
En considérant l'équation $r_A^2 \times (1) - r_P^2 \times (2)$, on obtient $(r_A^2 - r_P^2)E_m = -Gm_Tm_L(r_A - r_P)$.
Soit $E_m = -\frac{Gm_Tm_L}{r_A + r_P} = -\frac{Gm_Tm_L}{2a}$
A.N. $E_m = -3,83.10^{28}$ J

II Rotation propre de la Lune

II.1 $\Delta\overrightarrow{g} = -Gm_T\left(\frac{1}{(a-R_l)^2} - \frac{1}{(a+R_l)^2}\right)\overrightarrow{e_r} \simeq -\frac{4Gm_TR_L}{a^3}\overrightarrow{e_r}$. A.N. : $||\Delta\overrightarrow{g}|| = 4,97.10^{-5}$ m.s^{-2}.

II.2 L'étudiant est amené à faire un schéma : le point M_1 est davantage attiré vers la Terre que L, de même, le point M_2 l'est moins.

II.3 schéma A : $\omega_p > \omega_L$ schéma B : $\omega_p < \omega_L$.

II.4 $\mathscr{L}_p = \frac{2}{5}m_LR_L^2\omega_p$

II.5 Le moment de la force agissant sur L est nul car son bras de levier est nul. Les moments agissant sur L_1 et L_2 sont sensiblement égaux. En effet, les intensités des forces sont très proches (les distances par rapport au centre de la Terre valent approximativement a), et les bras de levier valent $R|\sin\varphi|$. D'où la relation demandée : $\mathscr{M} = \frac{2GR_Lm_T\Delta m}{a^2}\sin\varphi$

II.6 Attention à bien écrire correctement le théorème du moment cinétique. Le plus simple est sûrement de se placer dans le référentiel sélénocentrique (centré sur L et de même axe que le référentiel géo centrique). Ce référentiel est non galiléen, en translation circulaire par rapport au référentiel géocentrique. Il faut prendre en compte la force d'inertie d'entraînement. On se convaincs aisément que le moment des forces d'inertie est nul (la force d'innertie étant uniforme, de plus, L_1 et L_2 sont opposé par rapport à L).
On peut ainsi écrire $\frac{2}{5}m_LR_L^2\dot{\omega}_p = \mathscr{M} = -\frac{2GR_Lm_T\Delta m}{a^2}\sin\varphi$

II.7 Si $\omega_p < \omega_L$ (schéma B), $\varphi < 0$, donc d'après la question II.7, $\dot{\omega}_p > 0$, donc ω_p augmente.
Au contraire, Si $\omega_p > \omega_L$ (schéma B), $\varphi > 0$, donc d'après la question II.7, $\dot{\omega}_p < 0$.
Dans tous les cas, on constate que ω_p se rapproche de ω_L.

II.8 De la même façon, le Soleil déforme la Terre, et exerce donc dessus un couple qui temps à synchroniser la période de rotation propre de la Terre avec la période de révolution autour du Soleil. A part accident astronomique de grande ampleur, la durée du jour va continuer de croître pour tendre vers un an.