Concours CPGE 2019

Corrigé de l'épreuve optionnelle de mathématiques (2h)

1°) *Polynôme minimal de la matrice A*

1.a) Les n^2+1 matrices $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ sont n^2+1 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel dont la dimension est n^2 : elles sont donc nécessairement liées.

1.b) Ainsi, l'ensemble des entiers naturels k tels que $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^k$ sont liées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forme une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ minorée par 1 et contenant $k = n^2$, et donc non vide.
Donc celle-ci admet un plus petit élément $d \geq 1$, de sorte qu'il existe des réels $m_0, m_1, \dots, m_d$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{d} m_i\, A^i = 0$. Le réel m_d est non nul, sinon on aurait $\sum_{i=0}^{d-1} m_i\, A^i = 0$ avec $m_0, m_1, \dots, m_{d-1}$ non tous nuls. Ainsi, $I_n, A, A^2, \dots, A^{d-1}$ seraient liées, ce qui contredit le caractère minimal de l'entier d. Quitte à diviser la relation $\sum_{i=0}^{d} m_i\, A^i = 0$ par m_d, on obtient un polynôme unitaire M de degré minimal d tel que $M(A) = 0$. Ce polynôme M est bien unique, car si M' est un autre tel polynôme distinct de M, on a $(M - M')(A) = 0$ avec $M - M'$ non nulle et de degré au plus $d-1$ (car le terme de degré d égal à X^d dans M et M' se simplifie). On aurait donc un polynôme non nul de degré strictement inférieur à d annulant M, ce qui est contradictoire.
On a donc un unique polynôme annulant A de degré minimal d, de coefficient dominant égal à 1, qu'on peut donc écrire $M(X) = X^d + \mu_{d-1}\, X^{d-1} + \dots + \mu_1\, X + \mu_0$.

1.c) Soit v_i un vecteur propre (donc non nul) associé à la valeur propre λ_i de A ($1 \leq i \leq p$).
On a donc $A\, v_i = \lambda_i\, v_i$, et si $A^k\, v_i = \lambda_i^k\, v_i$, on a $A^{k+1}\, v_i = A\left(A^k\, v_i\right) = A\left(\lambda_i^k\, v_i\right) = \lambda_i^k\, A\, v_i = \lambda_i^{k+1}\, v_i$.
Par récurrence, on a donc démontré la relation $A^k\, v_i = \lambda_i^k\, v_i$, et il en résulte que :

$$\begin{aligned} M(A)\, v_i &= A^d\, v_i + \mu_{d-1}\, A^{d-1}\, v_i + \dots + \mu_1\, A\, v_i + \mu_0\, v_i \\ &= \lambda_i^d\, v_i + \mu_{d-1}\, \lambda_i^{d-1}\, v_i + \dots + \mu_1\, \lambda_i\, v_i + \mu_0\, v_i \;=\; M(\lambda_i)\, v_i. \end{aligned}$$

Comme $M(A) = 0$ et $M(A)\, v_i = M(\lambda_i)\, v_i$, on a $M(\lambda_i)\, v_i = 0$, et comme $v_i \neq 0$, on a $M(\lambda_i) = 0$.
Ainsi, les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont bien racines du polynôme minimal M.

1.d) Soit μ une racine réelle ou complexe de M qui n'est pas valeur propre de A. On peut écrire $M(X) = (X - \mu)\, N(X)$, avec $N \in \mathbb{R}[X]$ ou $N \in \mathbb{C}[X]$, et on a donc $M(A) = (A - \mu\, I_n)\, N(A) = 0$.
La matrice $A - \mu\, I_n$ est inversible car μ n'est pas valeur propre de A. Quitte à multiplier par $(A - \mu\, I_n)^{-1}$, on a donc $N(A) = 0$, et bien sûr, les parties réelle $\mathrm{Re}(N)$ et imaginaire $\mathrm{Im}(N)$ de N (qui sont des polynômes réels) annulent aussi A. Comme $\mathrm{dg}(N) = \mathrm{dg}(M) - 1 = d - 1$, l'un des polynômes réels $\mathrm{Re}(N)$ ou $\mathrm{Im}(N)$ est annulateur de A et de degré $d - 1 < d$. C'est contradictoire, et il n'existe donc aucune racine μ de M en dehors des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de A, et on peut poser (quitte à introduire les ordres de multiplicité des racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ du polynôme M) :

$$M(X) = X^d + \mu_{d-1}\, X^{d-1} + \dots + \mu_1\, X + \mu_0 \;=\; (X - \lambda_1)^{r_1}\, (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

Le degré d de ce polynôme minimal M est donc aussi égal à $r_1 + r_2 + \dots + r_p$.

2°) *Polynôme d'interpolation aux points* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ *de multiplicités* $r_1, r_2, \dots, r_p$

2.a) Si φ est l'application associant à tout polynôme P de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $d-1$ le d-uplet $\varphi(P)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ dont :

- les r_1 premiers éléments sont $P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \dots, P^{(r_1-1)}(\lambda_1)$,
- les r_2 éléments suivants sont $P(\lambda_2), P'(\lambda_2), \dots, P^{(r_2-1)}(\lambda_2)$,

....

- les r_p derniers éléments sont $P(\lambda_p), P'(\lambda_p), \dots, P^{(r_p-1)}(\lambda_p)$,

on a clairement (par linéarité de la dérivation et définition des opérations dans $\mathbb{R}^d$) :

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\, P, Q \in \mathbb{R}_{d-1}[X] : \quad \varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\,\varphi(P) + \mu\,\varphi(Q).$$

De plus, si $\varphi(P) = 0$, on observe que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des racines d'ordre au moins $r_1, r_2, \dots, r_p$ du polynôme P, qui a donc au moins $r_1 + r_2 + \dots + r_p = d$ racines. Comme c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-1$, c'est donc le polynôme nul, et $\varphi(P) = 0$ implique donc $P = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injectif, donc bijectif puisqu'il va d'un espace vectoriel de dimension d dans un autre espace vectoriel de même dimension d. C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2.b) Etant donnée une fonction f indéfiniment dérivable définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le d-uplet dont :

- les r_1 premiers éléments sont $f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \dots, f^{(r_1-1)}(\lambda_1)$,
- les r_2 éléments suivants sont $f(\lambda_2), f'(\lambda_2), \dots, f^{(r_2-1)}(\lambda_2)$,

....

- les r_p derniers éléments sont $f(\lambda_p), f'(\lambda_p), \dots, f^{(r_p-1)}(\lambda_p)$,

admet par conséquent un unique antécédent $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ par φ, ce qui donne l'existence et l'unicité d'un polynôme L de degré strictement inférieur à d tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad L(\lambda_i) = f(\lambda_i),\ L'(\lambda_i) = f'(\lambda_i),\ \dots,\ L^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i).$$

C'est le polynôme d'interpolation L de f aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $r_1, \dots, r_p$.

2.c) Soit $\mathcal{B} = \left(L_{1,0}, L_{1,1}, \dots, L_{1,r_1-1}, L_{2,0}, L_{2,1}, \dots, L_{2,r_2-1}, \dots, L_{p,0}, L_{p,1}, \dots, L_{p,r_p-1}\right)$ l'image réciproque par φ de la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$. Il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ en tant qu'image de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ par l'isomorphisme φ^{-1}.

On a alors $\varphi(L_{1,0}) = e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $\varphi(L_{1,1}) = e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, puis $\varphi(L_{1,r_1-1}) = e_{r_1}$.

Soit encore $\varphi(L_{1,j}) = e_{j+1}$ pour $0 \le j \le r_1 - 1$.

De même, $\varphi(L_{2,0}) = e_{r_1+1}$, $\varphi(L_{2,1}) = e_{r_1+2}$, puis $\varphi(L_{2,r_2-1}) = e_{r_1+r_2}$.

Soit encore $\varphi(L_{2,j}) = e_{r_1+j+1}$ pour $0 \le j \le r_2 - 1$.

Ensuite, $\varphi(L_{i,0}) = e_{r_1+r_2+\dots+r_{i-1}+1}$, $\varphi(L_{i,1}) = e_{r_1+r_2+\dots+r_{i-1}+2}$, puis $\varphi(L_{i,r_i-1}) = e_{r_1+r_2+\dots+r_{i-1}+r_i}$.

De façon générale, $\varphi(L_{i,j}) = e_{r_1+r_2+\dots+r_{i-1}+j+1}$ pour $1 \le i \le p$ et $0 \le j \le r_i - 1$.

En particulier, on a $\varphi(L_{p,r_p-1}) = e_{r_1+r_2+\dots+r_{p-1}+r_p} = e_d$.

Notons que dans $\mathbb{R}_{d-1}[X]$, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont la même image par l'isomorphisme φ, et on va justifier ainsi l'égalité suivante :

$$L(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i)\, L_{i,j}(X)$$

L'image du premier membre est par définition :

$$\varphi(L) = \left(f(\lambda_1),\, f'(\lambda_1),\ \dots\ ,\, f^{(r_1-1)}(\lambda_1),\quad \dots\quad ,\, f(\lambda_p),\, f'(\lambda_p),\ \dots\ ,\, f^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right).$$

L'image $\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i)\, L_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i)\, \varphi\left(L_{i,j}\right)$ du second membre est, en séparant le premier $\sum$ selon les valeurs de $i = 1, 2, \dots, p$:

$$\sum_{j=0}^{r_1-1} f^{(j)}(\lambda_1)\, e_{j+1} + \sum_{j=0}^{r_2-1} f^{(j)}(\lambda_2)\, e_{r_1+j} + \ \dots\ + \sum_{j=0}^{r_p-1} f^{(j)}(\lambda_p)\, e_{r_1+r_2+\dots+r_{p-1}+j+1}$$

$$= \left(f(\lambda_1),\, f'(\lambda_1),\ \dots\ ,\, f^{(r_1-1)}(\lambda_1),\quad \dots\quad ,\, f(\lambda_p),\, f'(\lambda_p),\ \dots\ ,\, f^{(r_p-1)}(\lambda_p)\right).$$

L'égalité $\varphi(L) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i)\, L_{i,j}\right)$ est ainsi démontrée

2.d) Considérons les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ (sans condition de degré sur P) tels que :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \ P(\lambda_i) = f(\lambda_i),\, P'(\lambda_i) = f'(\lambda_i),\ \ \dots\ ,\, P^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i),$$

ou encore, compte tenu de la définition de L :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \ P(\lambda_i) = L(\lambda_i),\, P'(\lambda_i) = L'(\lambda_i),\ \ \dots\ ,\, P^{(r_i-1)}(\lambda_i) = L^{(r_i-1)}(\lambda_i).$$

Ceci signifie que le polynôme $P - L$ admet les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec des multiplicités au moins égales à $r_1, \dots, r_p$, ce qui revient à dire de façon équivalente que $P - L$ est multiple du polynôme $(X-\lambda_1)^{r_1}\,(X-\lambda_2)^{r_2}\,\dots\,(X-\lambda_p)^{r_p} = M(X)$.

Ainsi, les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant les conditions demandées sont les polynômes de la forme $P(X) = L(X) + Q(X)\,M(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

3°) *Série entière en la matrice A et polynôme d'interpolation en la matrice A*

3.a) Pour tout entier naturel k, on pose $f_k(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i\, X^i$ et on introduit la division euclidienne du polynôme $f_k(X)$ par le polynôme minimal $M(X)$:

$$f_k(X) \;=\; Q_k(X)\,M(X) + L_k(X) \quad \text{avec} \quad d°(L_k) < d°(M) = d \quad \text{ou } L_k = 0.$$

Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont racines de M, on a bien sûr $f_k(\lambda_i) = L_k(\lambda_i)$ pour $1 \le i \le p$.

Puis par dérivation à l'ordre j, on obtient à l'aide de la formule de Leibniz :

$$f_k^{(j)}(X) \;=\; \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} Q_k^{(j-l)}(X)\,M^{(l)}(X) + L_k^{(j)}(X) \quad \text{avec} \quad d°(L_k) < d°(M) = d \quad \text{ou } L_k = 0.$$

Comme $M(X) = (X-\lambda_1)^{r_1}\,\dots\,(X-\lambda_p)^{r_p}$, le scalaire λ_i (pour $1 \le i \le p$) est racine d'ordre r_i de M, et donc des polynômes $M, M', \dots, M^{(r_i-1)}$, d'où résulte que $f_k^{(j)}(\lambda_i) = L_k^{(j)}(\lambda_i)$ pour $0 \le j \le r_i - 1$.

Comme le degré de L_k est strictement inférieur à $d = r_1 + \dots + r_p$, L_k appartient donc à $\mathbb{R}_{d-1}[X]$, et comme $L_k^{(j)}(\lambda_i) = f_k^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \le i \le p$ et $0 \le j \le r_i - 1$, on déduit que L_k est le polynôme d'interpolation de f_k aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicités $r_1, r_2, \dots, r_p$.

Le résultat obtenu à la question 2.c) montre alors que :

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i-1} f_k^{(j)}(\lambda_i)\, L_{i,j}(X).$$

3.b) D'après la définition de f_k, on a :

$$f_k^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{l=0}^{k} l(l-1)\ \dots (l-j+1)\, a_l\, \lambda_i^{l-j}.$$

Comme les séries-dérivées d'une série entière ont même rayon de convergence ($R = +\infty$ ici), et comme une série entière se dérive terme à terme sur $]-R,\ R[$, il en résulte que :

$$\lim_{k \to +\infty} f_k^{(j)}(\lambda_i) = \sum_{l=0}^{+\infty} l(l-1)\ \dots (l-j+1)\, a_l\, \lambda_i^{l-j} = f^{(j)}(\lambda_i).$$

On déduit alors du résultat de la question précédente 3.a) que :

$$\lim_{k \to +\infty} L_k(A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i - 1} \lim_{k \to +\infty} f_k^{(j)}(\lambda_i)\, L_{i,j}(A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{r_i - 1} f^{(j)}(\lambda_i)\, L_{i,j}(A) = L(A).$$

3.c) En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\,.\,\|$, on a $\|A\,B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où par récurrence facile, $\left\|A^i\right\| \leq \|A\|^i$ pour tout entier naturel i. Il en résulte que :

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\quad \left\|a_i\, A^i\right\| = |a_i|\,\left\|A^i\right\| \leq |a_i|\,\|A\|^i.$$

Puisque la série entière $\sum a_i\, x^i$ est de rayon de convergence $+\infty$, la série $\sum |a_i|\,|x|^i$ converge pour tout réel x puisqu'une série entière converge absolument dans son disque de convergence.
Ainsi, la série $\sum |a_i|\,\|A\|^i$ converge bien, ce qui assure la convergence de la série $\sum \left\|a_i\, A^i\right\|$, et donc la convergence absolue de $\sum a_i\, A^i$ et sa convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.d) Comme $f_k(X) = Q_k(X)\, M(X) + L_k(X)$, et comme M est annulateur de A, on a $f_k(A) = L_k(A)$.
Lorsque k tend vers $+\infty$:
- la somme partielle $f_k(A)$ de la série $\sum a_l\, A^l$ tend vers la somme de la série $f(A)$,
- $L_k(A)$ tend vers $L(A)$ d'après la question précédente 3.b).

Par unicité de la limite de la suite $k \longrightarrow f_k(A) = L_k(A)$, on en déduit que $f(A) = L(A)$.

4.a) La matrice proposée A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4.b) Le réel $\lambda_1 = a - b$ est valeur propre de A car $A - (a-b)\, I_3$ n'est pas inversible :

$$\mathrm{rg}(A - (a-b)\, I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = 1.$$

Et le sous-espace propre associé est composé des vecteurs v de composantes $x,\ y,\ z$:

$$(A - (a-b)\, I_3)\, v = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} b(x+y+z) = 0 \\ b(x+y+z) = 0 \\ b(x+y+z) = 0 \end{array}\right.$$

Puisque b est non nul, c'est donc le plan d'équation $x + y + z = 0$.
De même, le réel $\lambda_2 = a + 2\,b$ est valeur propre de A car $A - (a + 2\,b)\, I_3$ n'est pas inversible :

$$\mathrm{rg}(A - (a + 2\,b)\, I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2\,b & b & b \\ b & -2\,b & b \\ b & b & -2\,b \end{pmatrix} = 2.$$

Et le sous-espace propre associé est composé des vecteurs v de composantes x, y, z :

$$(A-(a+2\,b)\,I_3)\,v \;=\; \begin{pmatrix} -2\,b & b & b \\ b & -2\,b & b \\ b & b & -2\,b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} b(-2\,x+y+z)=0 \\ b(x-2\,y+z)=0 \\ b(x+y-2\,z)=0 \end{array}\right.$$

Puisque b est non nul, c'est donc la droite dirigée par le vecteur de composantes 1, 1, 1.

4.c) Un simple calcul donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}^2 \;=\; \begin{pmatrix} a^2+2\,b^2 & b^2+2\,a\,b & b^2+2\,a\,b \\ b^2+2\,a\,b & a^2+2\,b^2 & b^2+2\,a\,b \\ b^2+2\,a\,b & b^2+2\,a\,b & a^2+2\,b^2 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $A^2 = \lambda\,A + \mu\,I_3$ équivaut aux égalités scalaires :

$$\left|\begin{array}{l} a^2+2\,b^2 = \lambda\,a+\mu \\ b^2+2\,a\,b = \lambda\,b \end{array}\right.$$

Ce système est vérifié si et seulement si $\lambda = b+2\,a$ et $\mu = 2\,b^2-a^2-a\,b$, et on a donc :

$$A^2 \;=(b+2\,a)\,A+\left(2\,b^2-a^2-a\,b\right)I_3.$$

Ainsi donc, on a $M(A)=0$ avec $M(X)=X^2-(b+2\,a)\,X+\left(a^2+a\,b-2\,b^2\right)$ et on a obtenu le polynôme unitaire de degré minimal annulant A (puisqu'aucun polynôme $X-\lambda$ de degré 1 n'annule A, sinon A serait de la forme $\lambda\,I_3$).

En exploitant les résultats de la question 1, les racines de ce polynôme M sont les valeurs propres $a-b$ et $a+2\,b$ de cette matrice A. On retrouve directement ce résultat en calculant le discriminant de ce polynôme M, qui est $(b+2\,a)^2-4\,a^2-4\,a\,b+8\,b^2 = 9\,b^2$, d'où les racines de M :

$$\frac{b+2\,a-3\,b}{2} = a-b \;=\; \lambda_1 \quad \text{et} \quad \frac{b+2\,a+3\,b}{2} = a+2\,b \;=\; \lambda_2.$$

Ainsi, on a :

$$M(X) \;=\; (X-a+b)\,(X-a-2\,b).$$

4.d) Le polynôme $L(X) = \lambda\,X+\mu$ vérifie $L(\lambda_1) = f(\lambda_1)$ et $L(\lambda_2) = f(\lambda_2)$ si et seulement si :

$$\left|\begin{array}{l} \lambda(a-b)+\mu \;=\; f(a-b) \\ \lambda(a+2\,b)+\mu \;=\; f(a+2\,b) \end{array}\right.$$

Ce qui équivaut à :

$$\lambda \;=\; \frac{1}{3\,b}\,(f(a+2\,b)-f(a-b)) \quad \text{et} \quad \mu \;=\; \frac{a+2\,b}{3\,b}\,f(a-b)-\frac{a-b}{3\,b}\,f(a+2\,b).$$

Ainsi, le polynôme L est :

$$L(X) = \frac{f\,(a+2\,b)-f\,(a-b)}{3\,b}\,X+\frac{a+2\,b}{3\,b}\,f(a-b)-\frac{a-b}{3\,b}\,f(a+2\,b).$$

D'après le résultat de la question 3, on a donc puisque $f(A) = L(A)$:

$$f(A) = \frac{f\,(a+2\,b)-f\,(a-b)}{3\,b}\,A\;+\left(\frac{a+2\,b}{3\,b}\,f(a-b)-\frac{a-b}{3\,b}\,f(a+2\,b)\right)I_n.$$

5.a) Comme les fonctions cos et sin vérifient les hypothèses de la question 3 (elles sont en effet développables en série entière avec un rayon de convergence $R = +\infty$), on peut affirmer que :

$$\cos(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{A^{2i}}{(2i)!} = L_c(A) \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{A^{2i+1}}{(2i+1)!} = L_s(A).$$

5.b) Par hypothèse, les polynômes L_c et L_s vérifient :

$$\forall\, i \in [\![1,\, p]\!], \quad L_c(\lambda_i) = \cos(\lambda_i),\, L_c{}'(\lambda_i) = \cos'(\lambda_i), \quad \dots \;, L_c{}^{(r_i-1)}(\lambda_i) = \cos^{(r_i-1)}(\lambda_i),$$

$$\forall\, i \in [\![1,\, p]\!], \quad L_s(\lambda_i) = \sin(\lambda_i),\, L_s{}'(\lambda_i) = \sin'(\lambda_i), \quad \dots \;, L_s{}^{(r_i-1)}(\lambda_i) = \sin^{(r_i-1)}(\lambda_i).$$

Par conséquent, on a $L_c^2(\lambda_i) + L_s^2(\lambda_i) - 1 = \cos^2(\lambda_i) + \sin^2(\lambda_i) - 1 = 0$ pour $1 \le i \le p$.

Et quitte à exploiter la formule de Leibniz, on a pour $1 \le i \le p$ et pour $1 \le j \le r_i - 1$:

$$\begin{aligned}
\left(L_c^2 + L_s^2 - 1\right)^{(j)}(\lambda_i) &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} L_c^{(l)}(\lambda_i)\, L_c^{(j-l)}(\lambda_i) + \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} L_s^{(l)}(\lambda_i)\, L_s^{(j-l)}(\lambda_i) \\
&= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \cos^{(l)}(\lambda_i) \cos^{(j-l)}(\lambda_i) + \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \sin^{(l)}(\lambda_i) \sin^{(j-l)}(\lambda_i) \\
&= \left(\cos^2 + \sin^2 - 1\right)^{(j)}(\lambda_i) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $L_c^2 + L_s^2 - 1$ a pour racines $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_p$ avec des ordres de multiplicité au moins égaux à $r_1,\ \dots,\ r_p$, et il est donc multiple du polynôme minimal M de la matrice A :

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[X], \quad L_c^2 + L_s^2 - 1 \;=\; Q\, M.$$

5.c) Comme $M(A) = 0$, il en résulte que $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_n$ puisqu'on a :

$$\cos^2(A) + \sin^2(A) - I_n \;=\; L_c^2(A) + L_s^2(A) - I_n \;=\; Q(A)\, M(A) \;=\; 0.$$
