CONCOURS CPGE

EPITA / IPSA / ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 7 Avril 2018

<u>OPTION : PHYSIQUE</u>

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Données numériques relatives au problème

R	$=$	$8,31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$	Constante des gaz parfaits
N_A	$=$	$6,02.10^{23}\ mol^{-1}$	nombre d'Avogadro
k_B	$=$	$\frac{R}{N_A} = 1,38.10^{-23}\ J.mol^{-1}$	constante de Boltzmann
P_0	$=$	$1,0\ bar = 1,0.10^5 Pa$	pression atmosphérique moyenne au niveau du sol
M_a	$=$	$29\ g.mol^{-1}$	masse molaire moyenne des molécules d'air
T	$=$	$15\ °C = 288\ K$	température moyenne de l'atmosphère
η	$=$	$1,8.10^{-5}\ Pa.s$	viscosité dynamique de l'atmosphère au niveau du sol
ρ_f	$=$	$1,2\ kg.m^{-3}$	masse volumique de l'air à pression P_0 et température T
ρ_p	$=$	$2,5.10^3\ kg.m^{-3}$	masse volumique typique des particules considérées
g	$=$	$9,8\ m.s^{-2}$	accélération de pesanteur au niveau du sol

Formulaire :

Volume d'une boule de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$

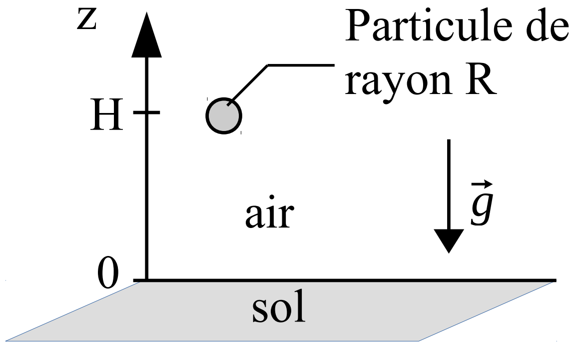
Introduction

Dans cette épreuve, on s'intéresse à un problème de pollution aux particules fines. Principalement, on étudie le mouvement de particules solides sphériques fines présentes dans l'air, de taille microscopique ou nanoscopique. Ces particules sont classées en catégories suivant leur taille : la catégorie PM100 regroupe les particules de diamètres compris entre $10\mu m$ et $100\mu m$, PM10 les particules de diamètre compris entre $2.5\mu m$ et $10\mu m$...

L'origine de ces particules fines est diverse : pollen, trafic routier, industrie, agriculture, combustions... L'impact sur la santé est en souvent d'autant plus important que les particules sont fines car elles peuvent plus aisément pénétrer à travers l'arbre respiratoire jusqu'aux alvéoles pulmonaires, et provoquer des inflammations, allergie, cancers...

Cette épreuve étudie le mouvement de ces particules dans une atmosphère au repos. Les 3 premières parties sont complètement indépendantes. La partie IV reprend quelques résultats des parties précédentes.

I Sédimentation de particules sous l'effet de la gravité



Considérons l'atmosphère de masse volumique ρ_f dans lequel se trouvent des particules sphériques solides homogènes de rayon R et de masse volumique ρ_p constante. Dans un premier temps, on supposera que l'interaction entre l'air et la particule est uniquement la somme de la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$ et de la force visqueuse $\overrightarrow{F_v}$. On admet que dans la limite de faibles vitesses de la particule par rapport à l'air, la force visqueuse puisse s'écrire $\overrightarrow{F_v} = -6\pi R\eta\vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse de la particule par rapport à l'air et η la viscosité de l'air. Les particules sont initialement à l'altitude H, sans vitesse initiale dans le référentiel terrestre. On considérera que l'on reste à des altitudes suffisamment faibles pour pouvoir négliger tout changement des propriétés de l'air.

I.1 Donner l'équation aux dimensions de η. Justifier que le Pa.s (pascal seconde) est une unité adaptée pour η.

I.2 Donner les expressions littérales de la masse m de la particule solide, ainsi que son poids $\overrightarrow{P}$ en fonction de son rayon R et de sa masse volumique ρ_p

I.3 Donner l'expression de la poussé d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$ s'exerçant sur la particule en fonction de ρ_f, R, g et $\overrightarrow{u_z}$. Justifier que l'on puisse la négliger face au poids.

I.4 On suppose qu'initialement, à $t = 0$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ est nul. En écrivant $\overrightarrow{v}(t) = v(t)\overrightarrow{e_z}$ où $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur unitaire ascendant, justifiez que l'équation différentielle vérifiée par v est

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{lim}}{\tau} \tag{1}$$

On donnera les expressions de τ et de v_{lim} en fonction des paramètres du problème.

I.5 En déduire l'expression de $v(t)$ puis $z(t)$.

On cherche maintenant le temps de sédimentation $T_s(H)$, c'est-à-dire le temps nécessaire à la particule pour tomber au sol depuis une altitude initiale H.

I.6 Donner l'expression littérale de $T_s(H)$ en fonction des paramètres du problème. On admettra que l'on puisse négliger la durée du régime transitoire.

I.7 Recopier et compléter ce tableau en faisant les applications numériques manquantes. On prendra $H = 500m$. Commenter

catégorie de particule	PM100	PM10	PM2.5	PM1	PM0.1
rayon R	$25\mu m$	$2,5\mu m$	$1,0\mu m$	$0,50\mu m$	$0,050\mu m$
$T_s(H)$ pour $H = 500m$					

I.8 En notant $c(z,t)$ la concentration volumique en particule à l'instant t et l'altitude z (c'est-à-dire le nombre de particules par unité de volume), exprimer le vecteur densité de flux de particules $\overrightarrow{j_g}$ dans le cas où les particules atteignent quasiment instantanément leur vitesse limite. On rappelle que $\overrightarrow{j_g}$ est défini de sorte que le nombre dN de particules franchissant une surface élémentaire orientée $\overrightarrow{dS}$ pendant une durée dt est $dN = \overrightarrow{j_g}.\overrightarrow{dS}dt$

II Modèle de l'atmosphère isotherme

Considérons maintenant la situation dans laquelle on étudie l'atmosphère au repos, c'est à dire sans mouvement atmosphérique d'ensemble (absence de vent). L'atmosphère est supposée être de température constante T, et de composition constante. La masse molaire moyenne des molécules d'air (principalement N_2 et O_2) est noté M_a. On note à nouveau (Oz) l'axe vertical ascendant, avec $z = 0$ l'altitude du sol. On notera $P(z)$ et $\rho(z)$ respectivement la pression et la masse volumique de l'air à une altitude z. Dans toute cette partie, l'air sera assimilé à un gaz parfait.

II.1 Expliquer brièvement pourquoi les molécules d'air ne finissent-elles pas par toutes retomber au sol.

II.2 Rappeler la loi de l'hydrostatique.

II.3 Donner le lien entre la masse volumique $\rho(z)$ de l'atmosphère à une altitude z, la pression $P(z)$, la température T et la masse molaires M_a des particules d'air.

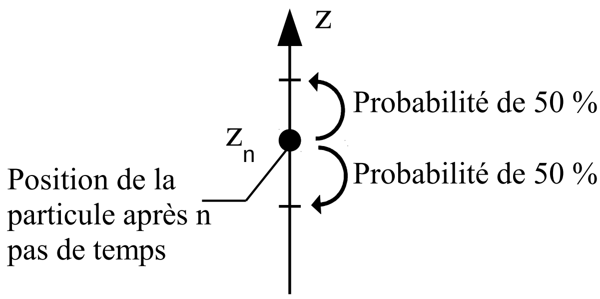
II.4 En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit la pression $P(z)$. Montrer que la solution de cette équation est $P(z) = P_0.exp(-\frac{z}{z_0})$ où z_0 est l'épaisseur typique de l'atmosphère, que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

II.5 Application numérique : calculer z_0. Commenter.

II.6 Montrer que la concentration en molécules d'air peut se mettre sous la forme $c(z) = c_0.exp(-\frac{E_p(z)}{k_BT})$ où $E_p(z)$ est l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule d'air.

III Mouvement brownien et diffusion de particules

Dans cette partie, on néglige toute influence du poids. On suppose un modèle unidimensionnel d'axe (Oz) où les particules se déplacent aléatoirement dans la direction "haut" ou "bas" en partant de la position O à $t = 0$. Les probabilités de faire un "pas" vers le haut ou vers le bas sont chacune de $0,5$. Si on note $\overrightarrow{z_n}$ le vecteur déplacement d'une particule après un nombre n de pas, on a alors $\overrightarrow{z_n} = \sum_{i=1}^{n} s_i a.\overrightarrow{e_z}$ avec a le pas du déplacement, supposé constant, $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire de l'axe (Oz) et s_i un paramètre aléatoire, tel que : $\forall i \in \mathbb{N}$, $s_i = \pm 1$, et $\langle s_i \rangle = 0$ (la notation $\langle f \rangle$ signifie "valeur moyenne de la variable f").



III.1 Quel est le déplacement moyen $r_n = \langle \overrightarrow{z_n} \cdot \overrightarrow{e_z} \rangle$ de la particule au bout de n pas? Commenter

III.2 Quel est le déplacement quadratique moyen au bout de n pas, c'est-à-dire la quantité $R_n = \sqrt{\langle ||\overrightarrow{z_n}||^2 \rangle}$.

On suppose que les déplacements élémentaires ont lieu à intervalles de temps fixes τ, et on s'intéresse au comportement de la particule à des instants $t \gg \tau$

III.3 Exprimer alors le nombre de pas n en fonction de τ et de t.

III.4 En faisant l'approximation que les suites r_n et R_n calculées précédemment sont des fonctions continues du temps $r(t)$ et $R(t)$, exprimer ces deux fonctions $r(t)$ et $R(t)$.

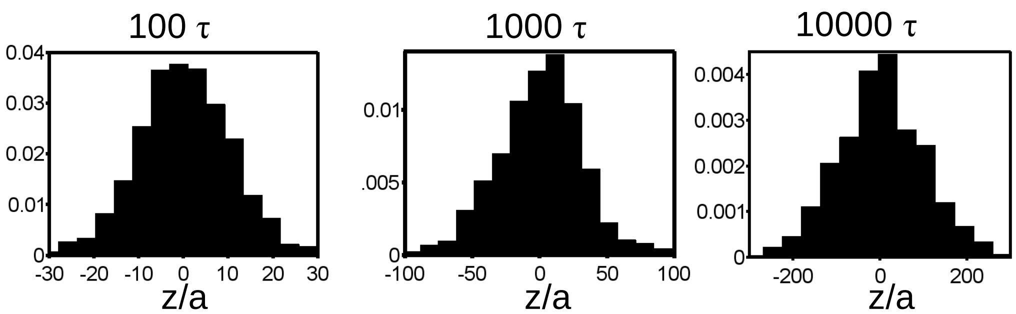
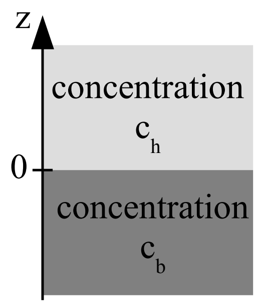


Figure 1: Histogrammes de répartition des positions de 1000 particules après plusieurs instants.

III.5 Sur les 3 histogrammes donnés figure 1 sont représentées les proportions de particules présentes aux altitudes z pour des simulations réalisées sur 1000 particules, à des temps 100τ, 1000τ et 10000τ. Donner dans chaque cas une approximations des valeurs de z_n et R_n en expliquant la méthode utilisée. Ces valeurs sont-elles en accord avec les questions précédentes.

Considérons maintenant la situation dans laquelle les particules sont en grand nombre. On note $c(z)$ le nombre de particule par unité de volume. Supposons que l'on parte de la situation dans laquelle à $t = 0$, la fonction $c(z)$ soit telle que $c(z) = \begin{cases} c_h & \text{si } z > 0 \\ c_b & \text{si } z < 0 \end{cases}$ Les particules étant toujours animées du mouvement aléatoire décrit précédemment.



III.6 Soit $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{e_z}$ un vecteur surface élémentaire placé en $z = 0$, exprimer le nombre dN_+ de particules passant de $z < 0$ à $z > 0$ à travers $\overrightarrow{dS}$, pendant un temps τ.

III.7 Exprimer de la même manière le nombre dN_- de particules passant de $z > 0$ à $z < 0$ à travers $\overrightarrow{dS}$, pendant un temps τ. En déduire alors le nombre algébrique d^2N de particule franchissant $\overrightarrow{dS}$ pendant τ (compté positivement lorsque les particules traversent la surface dans le sens de $\overrightarrow{dS}$).

En pratique, $c(z)$ peut difficilement être le siège d'une discontinuité comme c'est le cas ici en $z = 0$. Dans ce modèle, il n'est pas possible de discerner de détails en dessous d'une échelle typique de longueur égale à a, on considérera donc que $c_h \simeq c\left(\frac{a}{2}\right)$ et $c_b \simeq c\left(-\frac{a}{2}\right)$

III.8 En effectuant un développement limité à l'ordre 1 sur la fonction $c(z)$, avec la longueur a supposé petite, déduire l'expression de d^2N en fonction de $\frac{dc}{d_z}(0)$, a et dS.

III.9 Déduire de ce résultat que le vecteur densité de flux de particule $\overrightarrow{j_D}$ défini de telle sorte que $d^2N = \overrightarrow{j_D} \cdot \overrightarrow{dS}.\tau$ peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{j_D} = -D.\frac{dc}{d_z}\overrightarrow{e_z}$ avec $D = \frac{a^2}{2\tau}$. Commenter.

IV Équilibre d'une suspension de particule dans l'air

On considère à présent que pour décrire correctement le mouvement des particules, il est nécessaire de prendre en compte la contribution du mouvement aléatoire ainsi que celle de la pesanteur. Cherchons pour commencer à déterminer les paramètres a et τ définis à la partie III. Pour simplifier l'étude, nous considérerons que la valeur de τ est la même que celle qui a été déterminée question I.4. Il reste donc à déterminer la valeur de a. Rappelons qu'en raison de l'agitation thermique, l'énergie cinétique moyenne de translation d'une particule est $\frac{3}{2}k_BT$.

IV.1 En déduire la vitesse quadratique moyenne u_z uniquement dans la direction verticale (Oz).

IV.2 On suppose que tout se passe comme si la distance a est la longueur parcourue pendant τ à vitesse constante $\sqrt{2}u_z$, en déduire l'expression de de a, puis celle de D défini à la question III.9 en fonction de la température T, du rayon R des particules et de la viscosité η du fluide. Cette dernière relation est appelée loi de Stokes-Einstein.

On considère à présent que le mouvement des particule est décrit par la somme de deux vecteur densité volumique de flux de particules $\overrightarrow{j_g}$ et $\overrightarrow{j_D}$ calculés respectivement aux questions I.8 et III.9

IV.3 En ne considérant que les mouvement verticaux des particules, effectuer un bilan de nombre de particules entre deux instants t et $t + dt$ entre deux altitudes z et $z + dz$. Démontrer que $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(j_D + j_g\right)$. En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par c.

IV.4 Quelle équation obtient-on en l'absence de pesanteur. Commenter

IV.5 Quelle équation obtient-on en régime permanent (sans absence de pesanteur)? Résoudre cette équation.

IV.6 Montrer alors qu'en régime permanent, $c(z)$ est de la forme $c(z) = c_0.exp\left(-\frac{z}{z_R}\right)$, où c_0 et z_R sont des constantes. Exprimer z_R en fonction du rayon R des particules et des constantes du problème.

IV.7 Application numérique : recopier et compléter ce tableau

catégorie de particule	PM100	PM10	PM2.5	PM1	PM0.1
rayon R	$25\mu m$	$2,5\mu m$	$1,0\mu m$	$0,50\mu m$	$0,050\mu m$
z_R					

IV.8 Montrer que $c(z)$ peut se mettre sous le forme $c(z) = c_0.exp(-\frac{E_p(z)}{k_BT})$ avec $E_p(z)$ l'énergie potentielle de pesanteur d'une particule.

IV.9 On suppose que les particules restent en suspension dans l'atmosphère si $z_R > R$, en déduire le rayon maximal R_{max} des particules pouvant rester en suspension dans l'atmosphère. Faire l'application numérique.

IV.10 Expliquer alors le problème qui se pose quant à la pollution atmosphérique aux nano-particules comparé à la pollution par des micro-particules.

FIN DE l'ENONCE