Samedi 7 Avril 2018

EPREUVE : MATHEMATIQUE

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

E.P.I.T.A. 2018

Epreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

■ PROBLÈME I : La série harmonique

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots \ + \frac{1}{n}.$$

1°) *Question préliminaire*
Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.
En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.

2°) *Première méthode*
a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

b) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3°) *Deuxième méthode*
a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

En déduire l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c) Etablir la divergence de $(H_n)_{n\geq 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \sim \ln(n)$.

d) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
Etudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ et montrer que $0 \leq \gamma_n \leq 1$.
En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$ et la formule :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \dots \ + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

■ PROBLÈME II : Etude d'intégrales

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera dans la suite.

A] *Cas où la fonction f est définie par* $f(t) = \frac{P(t)}{t^2+1}$ *avec P polynômiale*

a) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = 1$, donc que $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

- Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t)-f(2t)}{t}$, en donner un équivalent en $+\infty$ et justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
- Effectuer dans l'intégrale $I(f)$ le changement de variables défini par $u = t^2$.
- Déterminer deux réels a et b tels qu'on ait pour tout réel $u \geq 0$:

$$\frac{3}{2(u+1)(4u+1)} = \frac{a}{4u+1} + \frac{b}{u+1}.$$

- En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

b) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t$, donc que $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

- Justifier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et préciser leurs valeurs.
- En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

c) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^2$, donc que $f(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

- En posant $u = t^2$, calculer les intégrales $\int_0^{A} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{A} \frac{f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel positif A.
- En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

d) On suppose ici que $P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, donc que $f(t) = \frac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{t^2+1}$.

En exploitant les résultats précédents, justifier la convergence et donner la valeur de $I(f)$.

e) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^3$, donc que $f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$.

- Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t)-f(2t)}{t}$, et étudier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
- Que dire de l'intégrale $I(f)$ si l'on suppose que $P(t) = t^n$, donc $f(t) = \frac{t^n}{t^2+1}$, avec $n \geq 3$?

B] *Cas où la fonction f est définie par* $f(t) = e^{-t}$

1°) *Convergence de l'intégrale* $I(f)$ *lorsque* $f(t) = e^{-t}$

a) En exploitant le développement limité de l'exponentielle, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(2t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}.$$

En déduire qu'on peut prolonger par continuité la fonction $t \longrightarrow \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ en $t = 0$.

b) Etablir qu'on a lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

c) En déduire la convergence de l'intégrale $I(f)$.

2°) *Calcul de l'intégrale* $I(f)$ *lorsque* $f(t) = e^{-t}$

a) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, établir l'égalité suivante (en justifiant l'existence des intégrales) :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

En déduire que :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

b) On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $h(u) = \frac{e^{-u}-1}{u}$ si $u \neq 0$, et $h(0) = -1$.

Etablir que h est continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle admet une primitive H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'on a pour tout réel $\varepsilon > 0$ l'égalité suivante :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln(2).$$

c) En déduire enfin la valeur de l'intégrale $I(f)$.

3°) *Application au calcul d'une autre intégrale*

En posant $t = -\ln(u)$ dans l'intégrale $I(f)$ étudiée dans la partie B, déterminer la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u.$$