Concours EPITA - IPSA
Epreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur
Robot Dinosaure

Durée : 2 heures

L'utilisation de calculatrices est interdite.

La consultation de documents est interdite.

Le sujet comporte 6 pages.

Présentation

Les robots ont de multiples applications. En particulier dans le domaine du divertissement et de la culture, les robots dinosaures sont apparus pour équiper notamment certains musées.

L'étude proposée ici concerne un robot dinosaure montré sur la Figure 1.

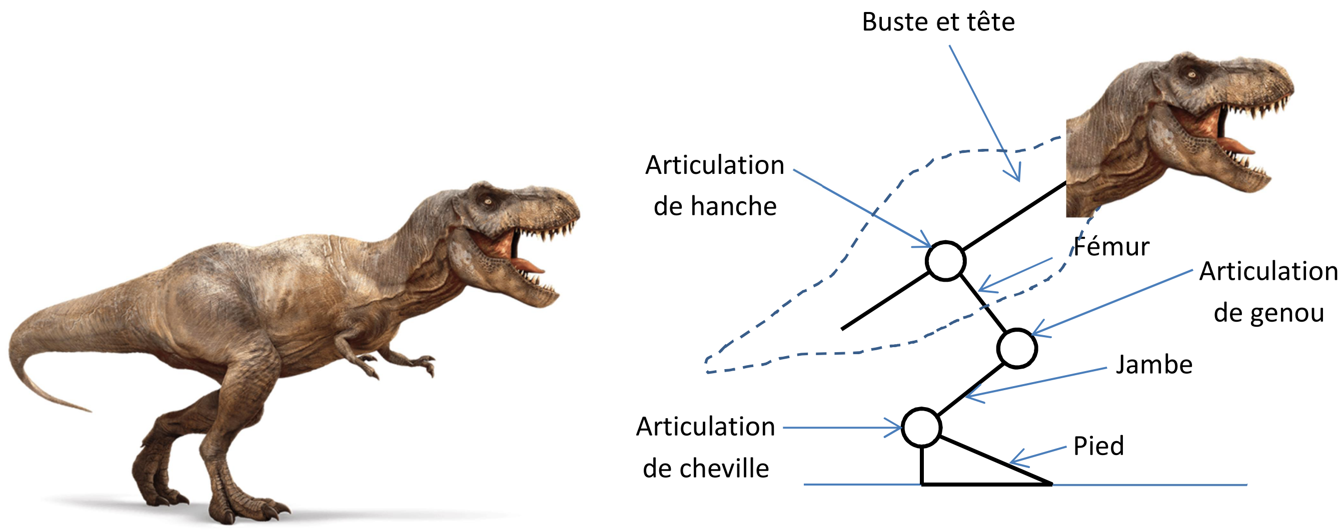


Figure 1 : Robot dinosaure étudié

Ce robot est capable de se dresser sur ses pattes et de marcher. Il comporte un buste, un fémur, une jambe et un pied P. Le pied est posé au sol. Les solides sont articulés, une articulation de cheville se situe entre le pied et la jambe, une articulation de genou se situe entre la jambe et le fémur, et une articulation de hanche se situe entre le fémur et le buste. Chaque articulation comporte un moteur électrique.

Dimensionnement du contrepoids de la queue

Objectif : l'objectif de cette partie est de dimensionner le contrepoids de la queue afin d'assurer la stabilité du robot, puis de définir des limites pour les angles des articulations afin d'éviter tout basculement.

Le référentiel lié à la Terre est supposé galiléen.

Modélisation du contact entre le sol et le pied

On modélise l'action du sol sur le pied par une action mécanique répartie sur une surface rectangulaire (rectangle dans le plan $(\vec{x},\vec{z})$. Le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est fixe par rapport à la Terre. On note l'accélération de la pesanteur $\vec{g}=-g.\vec{y}$.

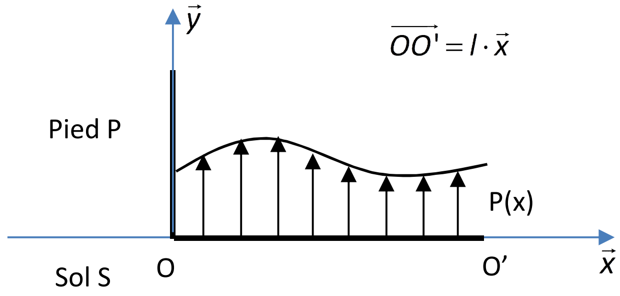


Figure 2 : Modélisation du contact du sol sur le pied

On appelle P(x) la pression de contact qu'exerce le sol sur le pied. Elle s'applique sur une surface délimitée suivant $\vec{x}$ entre O et O' et de largeur h sur l'axe $\vec{z}$.

1. Montrer qu'il existe un point où le moment de l'action du sol sur le pied est nul.

   La résultante de l'action répartie P est sur $\vec{y}$, le moment suivant $\vec{z}$, le torseur est un glisseur et il existe donc un point où le moment est nul.

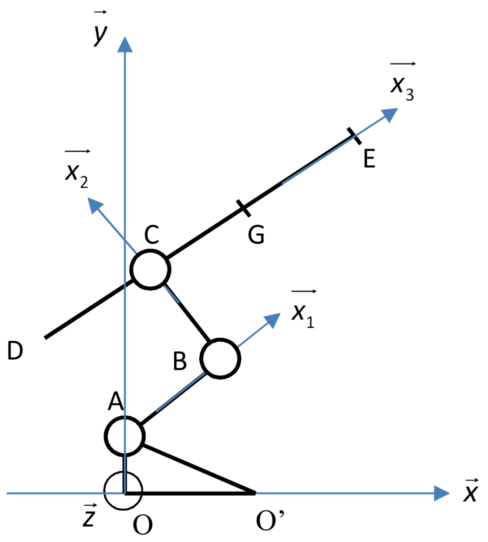
2. Justifier que le point ou le moment de l'action du sol sur le pied est nul se situe entre les deux extrémités du pied.

   Le calcul du moment de l'action P en O induit que le point de moment nul est à droite de O.
   Le calcul du moment de l'action P en O' induit que le point de moment nul est à gauche de O'.

Dimensionnement du contrepoids

On souhaite qu'à l'équilibre, le couple exercé par le moteur de hanche soit nul.

On modélise le robot comme sur la Figure 3. Le pied P est posé sur le sol. La jambe J est et le pied P sont en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$. La jambe J et le fémur F sont en liaison pivot d'axe $(B,\vec{z})$. Le fémur et l'ensemble constitué par le buste et la tête sont en liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$. Le centre de gravité de l'ensemble buste et tête est situé en G, la masse de l'ensemble tête et buste est notée m_b . La queue est munie d'un contrepoids que l'on considère ponctuel de masse m_c en D. On néglige la masse de la jambe J et du fémur F devant la masse du buste et du contrepoids.



On note :

$\overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{x_1}$ avec $a = 0{,}7\,m$;

$\overrightarrow{BC} = b \cdot \overrightarrow{x_2}$ avec $b = 0{,}5\,m$

$\overrightarrow{CG} = f \cdot \overrightarrow{x_3}$ avec $e = 1m$;

$\overrightarrow{GE} = e \cdot \overrightarrow{x_3}$ avec $e = 2m$;

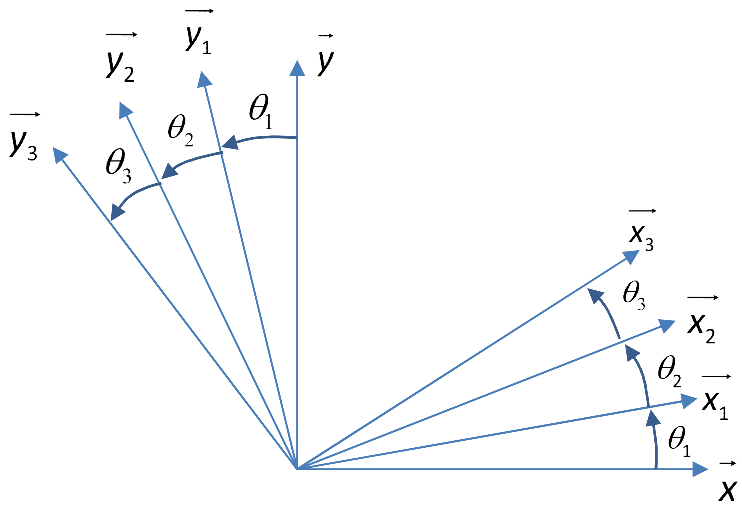
$\overrightarrow{CD} = -d \cdot \overrightarrow{x_3}$ avec $d = 0{,}6m$;

$\theta_1 = \left(\vec{x}, \overrightarrow{x_1}\right)$;

$\theta_2 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$;

$\theta_3 = \left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\right)$.

Figure 3 : Modélisation du robot



3. Isoler le buste du robot T, faire le bilan des actions mécaniques extérieures et écrire les équations traduisant l'équilibre statique du robot. En déduire une relation entre la masse du buste m_b et la masse du contrepoids m_c et les constantes dimensionnelles du problème.

   Les actions mécaniques s'appliquant sur T sont : le poids du buste (glisseur s'appliquant en G), le poids du contrepoids (glisseur s'appliquant en D), l'action du fémur en liaison pivot en B et l'action du moteur.

4. Déterminer la masse du contrepoids m_c.

   En appliquant le Principe Fondamental de la Statique, on obtient $m_c \cdot d - m_b \cdot f = 0$, d'où $m_c = m_b \cdot \dfrac{f}{d}$

5. Isoler le robot complet et faire le bilan des actions mécaniques extérieures qui s'y appliquent.

   Les actions qui s'appliquent sont le poids du robot s'appliquant en C et la réaction du sol entre O et O'.

6. Déterminer deux inéquations reliant θ_1, θ_2 et les constantes du problème qui permettent d'éviter tout basculement du robot vers l'avant ou vers l'arrière.

   Pour que le robot soit à l'équilibre, il faut que la verticale passant par C soit entre O et O'. On en déduit : $0 \le a \cdot \cos\theta_1 + b \cdot \cos\theta_2 \le l$.

Pilotage cinématique des moteurs

L'objectif de cette partie est de déterminer les lois de commande (en vitesses de rotation) des moteurs des articulations en connaissant le mouvement de la tête du dinosaure.

On cherche à imposer le mouvement de la tête du robot. On impose donc le torseur cinématique de la tête T par rapport au sol S au point E sous la forme $V_{T/S} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega & 0 \end{Bmatrix}_{E,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

7. Justifier la présence de 3 moteurs.

   Le robot est 3 degré de libertés, il faut donc 3 moteurs pour le mouvoir.

8. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OE}$. On ne cherchera pas à projeter le résultat dans une base particulière.

   $\overrightarrow{OE} = a \cdot \overrightarrow{x_1} + b \cdot \overrightarrow{x_2} + (e+f) \cdot \overrightarrow{x_3}$

9. Déterminer ω, v_x et v_y en fonction des vitesses de rotation des moteurs $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$, des angles θ_1, θ_2, θ_3 et des différentes longueurs.

   On calcule $\overrightarrow{V_{E,T/S}} = a.\dot{\theta}_1 \overrightarrow{y_1} + b.\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\overrightarrow{y_2} + (e+f).\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)\overrightarrow{y_3}$.

   D'où $\begin{cases} \omega = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \\ V_x = a.\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + b.\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\sin(\theta_1+\theta_2) + (e+f).\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ V_y = -a.\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 - b.\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\cos(\theta_1+\theta_2) - (e+f).\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \end{cases}$

10. Mettre le résultat précédent sous forme matricielle : $U = K.\Theta$ où $U = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}$, $\Theta = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$ et K une matrice de dimensions 3x3.

    $$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\sin\theta_1 & b.\sin(\theta_1+\theta_2) & (e+f).\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ -a.\cos\theta_1 & -b.\cos(\theta_1+\theta_2) & -(e+f).\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

11. Quelle opération faut-il faire pour déterminer $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$ en fonction de ω, v_x et v_y, des angles θ_1, θ_2 et θ_3 et des différentes longueurs ?

    Il faut inverser la matrice K.

12. On suppose dans cette question que $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \theta_3 = 0$. Ecrire la matrice K dans ce cas particulier. Le pilotage des moteurs est-il possible dans cette position ? Justifier.

    Pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \theta_3 = 0$, la matrice comporte une ligne de 0, ce qui fait que K n'est pas inversible. Effectivement dans cette position le robot est complètement levé et il est impossible d'avoir une vitesse vy.s

Dimensionnement des moteurs

L'objectif de cette partie est de déterminer les couples moteurs des articulations de hanche et de genou en fonction d'un mouvement souhaité de la tête du robot. On souhaite que le mouvement de la tête soit une translation suivant $\vec{x}$: $V_{T/S} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega & 0 \end{Bmatrix}_{E,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Dimensionnement du moteur de hanche

On isole le solide T constitué du buste, la tête et le contrepoids. On note J le moment d'inertie du solide T autour de l'axe $(C,\vec{z})$. On rappelle que l'ensemble buste – tête – contrepoids est tel que son centre d'inertie est le point C.

13. Faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant sur le solide isolé T en écrivant les torseurs associés.
    Les actions mécaniques s'appliquant sur T sont : le poids du buste et le poids du contrepoids (glisseur s'appliquant en C), l'action du fémur en liaison pivot en C et l'action du moteur.
14. Déterminer $\overrightarrow{\sigma_{C,T/S}}$ le moment cinétique en C du mouvement du solide T par rapport à S.
    $\overrightarrow{\sigma_{C,T/S}} = J \cdot \omega \cdot \vec{z}$
15. Déterminer $\overrightarrow{\delta_{C,T/S}}$ le moment dynamique du solide T par rapport au sol S en C.
    $\overrightarrow{\delta_{C,T/S}} = J \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z}$
16. Déterminer le couple C_H qu'exerce le moteur de hanche sur le solide T.
    $C_H = J \cdot \dot{\omega}$

Dimensionnement du moteur de genou

On isole maintenant l'ensemble constitué par la tête, le contrepoids, le buste et le fémur. On notera cet ensemble S_g.

On néglige la masse et l'inertie du fémur devant la masse du sous ensemble constitué par du contrepoids, du buste et de la tête.

17. Faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant sur le solide isolé T en écrivant les torseurs associés.
    Les actions mécaniques s'appliquant sur Sg sont : le poids du buste et le poids du contrepoids (glisseur s'appliquant en C), l'action de la jambe en liaison pivot en B et l'action du moteur.
18. Déterminer $\overrightarrow{\sigma_{B,S_g/S}}$ le moment cinétique en B de l'ensemble S_g par rapport à S.
    $$\overrightarrow{\sigma_{B,S_g/S}} = J \cdot \omega \cdot \vec{z} + (m_b + m_c)\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{V_{C,Sg/S}} = \left[J \cdot \omega + (m_b + m_c) b.\overrightarrow{x_2} \wedge \left(Vx.\vec{x} + Vy.\vec{y}\right)\right] \cdot \vec{z}$$
    $$= \left[J \cdot \omega + (m_b + m_c) b.(-\sin\theta_2.Vx + \cos\theta_2.Vy)\right] \cdot \vec{z}$$
19. Déterminer $\overrightarrow{\delta_{B,S_g/S}}$ le moment dynamique en B de l'ensemble S_g par rapport au sol S.
    $$\overrightarrow{\delta_{B,S_g/S}} = J \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{z} + (m_b + m_c)\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{a_{C,Sg/S}} = \left[J \cdot \dot{\omega} + (m_b + m_c) b.\left(-\sin\theta_2.\dot{Vx} + \cos\theta_2.\dot{Vy}\right)\right] \cdot \vec{z}$$

20. Déterminer le couple C_G qu'exerce le moteur de genou sur le solide S_g.

$$C_G = \left[J \cdot \dot{\omega} + (m_b + m_c) b. \left(-\sin\theta_2 . \dot{Vx} + \cos\theta_2 . \dot{Vy} \right) \right] + (m_b + m_c).b.\sin\left(\theta_1 + \theta_2 - \frac{\pi}{2} \right)$$