I Sédimentation de particules sous l'effet de la gravité

I.1 $[\eta]=\dfrac{[Force]}{L.[vitesse]}=\dfrac{M.L.T^{-2}}{L^2.T^{-1}}=M.L^{-1}.T^{-1}$

$[Pa.s]=[Force].L^{-2}.T=M.L.T^{-2}.L^{-2}.T=M.L^{-1}.T^{-1}$

Donc le Pa.s est bien une unité adaptée pour η

I.2 $m=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_p$, $\vec{P}=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_p\vec{g}=-\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_p g\vec{e}_z$

I.3 La poussée d'Archimède étant l'opposé du poids du fluide déplacé, on a

$\overrightarrow{\Pi_A}=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_f g\vec{e}_z$

On a : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Pi_A}\|}{\|\vec{P}\|}=\dfrac{\rho_f}{\rho_p}\ll 1$: le poussée d'Archimède est donc bien négligeable devant le poids

I.4 Système : particule

Référentiel terrestre supposé galiléen

Hypothèse : compte tenu de l'absence de mouvement atmosphérique, le mouvement est uniquement suivant la direction (Oz)

Liste des forces :

poids $\vec{P}=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_p\vec{g}=-\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_p g\vec{e}_z$

Force de frottement visqueux : $\vec{F}_v=-6\pi R\eta v\vec{e}_z$

Poussée d'Archimède négligée

Un théorème de mécanique au choix aboutit à

$\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v=\dfrac{v_{\lim}}{\tau}$ avec $\tau=\dfrac{m}{6\pi R\eta}=\dfrac{2R^2\rho_p}{9\eta}$ et $v_{\lim}=-\dfrac{2R^2\rho_p g}{9\eta}$

I.5 La résolution de cette équation conduit à $v(t)=v_{\lim}\left(1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$. En intégrant une nouvelle fois, on obtient $z(t)=H+v_{\lim}\left(t+\tau\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ (rappelons que $v_{\lim}$ est négative, ce qui assure bien que z(t) est décroissante).

I.6 En négligeant la durée du régime transitoire, $z(t)\simeq H+v_{\lim}t$, la durée du chute est donc $T_s=-\dfrac{H}{v_{\lim}}$, ainsi, $T_s=\dfrac{9\eta H}{2R^2\rho_p g}$.

I.7

Catégorie de particule	PM100	PM10	PM2,5	PM1	PM0,1
Rayon R	25 µm	2,5 µm	1,0 µm	0,50 µm	0,05 µm
T_s	44 minutes	3,1 jours	19 jours	77 jours	21 ans

On se rend ainsi compte par ce calcul que le temps de séjour de nanoparticules dans l'atmosphérique est considérablement long. Ce genre de pollution met donc beaucoup de temps à se dissiper par sédimentation .

I.8 Soit $\overrightarrow{dS}$ une surface orientée d'axe (Oz), les particules traversant $\overrightarrow{dS}$ pendant une durée dt se trouvent dans un volume $|dS.v_{\lim}|dt$, il y en donc un nombre $c(z,t)|dS.v_{\lim}|dt$. Par identification, on a donc $\vec{j}_g=c(z,t)v_{\lim}\vec{e}_z$

II Modèle de l'atmosphère isotherme

II.1) Les molécule étant soumises à agitation thermique, leur vitesse d'agitation permanent leur permet d'atteindre des altitudes relativement importantes.

II.2) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, $\overrightarrow{grad}\, P=\rho\,\vec{g}$, le problème n'ayant de dépendance uniquement suivant l'axe (Oz), on a $\frac{dP}{dz}=-\rho(z)\,g$

II.3) En utilisant l'équation des gaz parfaits, on trouve $\rho(z)=\frac{M_a P(z)}{RT}$

II.4) En combinant les deux équations précédente, on a $\frac{dP}{dz}+\frac{M_a g}{RT}P(z)$, qui se réécrit $\frac{dP}{dz}+\frac{1}{z_0}P(z)$ avec $z_0=\frac{RT}{M_a g}$. La résolution de l'équation différentielle conduit à $P(z)=P_0\exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$

II.5) A.N. : z_0 =8,4 km. C'est l'épaisseur typique de l'atmosphère terrestre. Pour des variations d'altitude faible devant z_0 , on ne ressent que très faiblement les variations de pression (lors de l'ascension d'un building d'une centaine de mètre par exemple), en montagne, sur des variations d'altitude kilométriques, la chute de pression avec l'altitude commence à être ressentie.

II.6) $c(z)=\frac{P(z)}{RT}=c_0\exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$ avec $c_0=\frac{P_0}{RT}$, en injectant l'expression de c_0, on trouve :

$c(z)=c_0\exp\left(-\frac{M_a g\, z}{RT}\right)$ avec $M_a=m_a N_A$ où m_a est la masse d'une molécule d'air.

d'où $c(z)=c_0\exp\left(-\frac{m_a N_A g\, z}{RT}\right)$, or $k_B=\frac{R}{N_A}$

ainsi $c(z)=c_0\exp\left(-\frac{m_a g\, z}{k_B T}\right)$ ce qui est bien de la forme attendue avec $E_p(z)=m_a g\, z$ l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule d'air.

III Mouvement brownien et diffusion de particules

III.1 $r_n=\langle\sum_{i=1}^{n} s_i a\rangle$, or par linéarité de la moyenne

$r_n=a\sum_{i=1}^{n}\langle s_i\rangle$, avec $r_n=a\sum_{i=1}^{n}\langle s_i\rangle$, or $\forall i$, $\langle s_i\rangle=0$

Donc $r_n=0$

III.2 $R_n^2=\langle\left(\sum_{i=1}^{n} s_i a\vec{e}_z\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} s_j a\vec{e}_z\right)\rangle=a^2\langle\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} s_j\right)\rangle$

décomposons le produit de ces deux sommes comme la somme des produits des termes de même indice et de ceux d'indices différents

Soit $R_n^2=a^2\langle\left(\sum_{k=1}^{n} s_i^2\right)+\left(\sum_{j\neq i} s_j . s_i\right)\rangle$, par linéarité de la moyenne, on a :

$R_n^2=a^2\left(\sum_{k=1}^{n}\langle s_i^2\rangle\right)+\left(\sum_{j\neq i}\langle s_j . s_i\rangle\right)$, or $\forall i$, $s_i^2=1$, et $\forall\, j\neq i$, $\langle s_j . s_i\rangle=0$

Ainsi $R_n^2=a^2 n$, d'où finalement $R_n=a\sqrt{n}$

III.3 $n=\frac{t}{\Delta T}$

III.4 En injectant l'expression de n, on a $r(t)=0$ et $R(t)=a\sqrt{\frac{t}{\Delta T}}$

III.5 Dans chaque cas, les histogramme sont quasi symétriques par rapport à l'abscisse z=0, on en déduit que dans chaque cas, $r_n=0$. Pour trouver R_n , prenons la demi-largeur des histogramme à mi-hauteur. On trouve le tableau suivant

n	100	1000	10000
R_n	12a	35a	120a
$\frac{R_n}{a\sqrt{n}}$	1,2	1,1	1,2

On trouve donc, aux erreurs de calcul et approximations près, $R_n = Cste\sqrt{n}$, ce qui est en accord avec les résultats précédents.

III.6 Les particules passant d'un côté à l'autre de la surface sont dans un volume $dV = dS.a$, pour chaque situation, une moitié de ces particules comprise dans ce volume traverse la surface, et l'autre s'en éloigne.

Ainsi $dN_+ = \frac{c_b\, a\, dS}{2}$

III.7 de la même façon, $dN_- = \frac{c_h\, a\, dS}{2}$. Par conséquent, $d^2N = dN_+ - dN_- = \frac{a}{2}(c_b - c_h)dS$

III.8 $d^2N = \frac{a}{2}\left(c\left(\frac{-a}{2}\right) - c\left(\frac{a}{2}\right)\right)dS$ avec $c\left(\frac{a}{2}\right) \simeq c(0) + \frac{a}{2}\frac{dc}{dz}(0)$ et $c\left(\frac{-a}{2}\right) \simeq c(0) - \frac{a}{2}\frac{dc}{dz}(0)$

Ainsi, $d^2N = -\frac{a^2}{2}\frac{dc}{dz}(0)dS$

III.9 Le problème étant unidimensionnel suivant (Oz), $\vec{j_D} = j_D\vec{e_z}$. Ainsi

$d^2N = \vec{j_D}\cdot\vec{dS}.\Delta T = j_D.dS.\Delta T$, ce qui s'identifie à l'expression trouvé en III.8 avec $j_D = -\frac{a^2}{2\Delta T}\frac{dc}{dz}$.

On trouve donc bien le résultat attendu avec $D = \frac{a^2}{2\Delta T}$.

On constate que le vecteur densité de flux de particule est opposé au gradient de concentration, ce qui montre que ce processus tend à homogénéiser la concentration en particule.

IV Équilibre d'une suspension de particules dans l'air

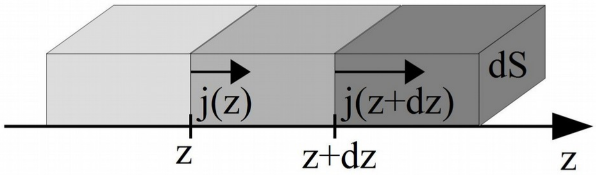
IV.1 $\frac{1}{2}m(u_z^2 + u_x^2 + u_y^2) = \frac{3}{2}k_B T$ avec $u_z^2 = u_x^2 = u_y^2$ car l'agitation thermique est isotrope.

Ainsi $\frac{1}{2}mu_z^2 = \frac{1}{2}k_B T$, d'où $u_z = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$, or $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p$, d'où $u_z = \sqrt{\frac{3k_B T}{4\pi R^3 \rho_p}}$

IV.2 L'énoncé indique que $a = \sqrt{2}u_z\tau$, donc d'après ce qui précède, $a = \frac{\sqrt{2k_B T m}}{6\pi R\eta}$. Avec

$\Delta T = \frac{m}{6\pi R\eta}$ On obtient alors $D = \frac{k_B T}{6\pi R\eta}$

IV.3 Notons $j = j_D + j_g$. Considérons comme système le volume de section dS pris entre les altitudes z et z + dz comme schématisé ci dessous



Le nombre de particule dN contenu dans le système est $dN = c(z,t).dS$, ainsi la variation du nombre de particule dans le système entre t et t+dt est $d^2N = (c(z,t+dt) - c(z,t)).dS = \frac{\partial c}{\partial t}.dS.dt$.

Une autre façon de calculer d^2N est de faire le bilan des particules entrant et sortant dans la système :

$d^2N = j(z,t).dS.dt - j(z+dz,t).dS.dt = -\frac{\partial j}{\partial z}.dS.dt$.

En égalant les deux expressions de d^2N , on obtient $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z}$

soit $\frac{\partial c}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}(j_D+j_g)$. En remplaçant par les expressions de j_D et j_g , on obtient

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}-v_{\mathrm{lim}}\frac{\partial c}{\partial z}$$

IV.4 En l'absence de pesanteur, $j_g=0$, or $j_D=-D\frac{\partial c}{\partial z}$, on obtient alors une équation aux dérivées partielles pour c : $\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$. C'est une équation de diffusion : en l'absence de force extérieure, la concentration en particule tend donc à s'homogénéiser.

IV.5 En régime permanent, il n'y a plus de mouvement global de particule, donc $j=0=j_D+j_g$ or $j_D=-D\frac{\partial c}{\partial z}$ et $j_g=v_{\mathrm{lim}}c$, on obtient donc l'équation $\frac{\partial c}{\partial z}-\frac{v_{\mathrm{lim}}}{D}c=0$ (rappelons que $v_{\mathrm{lim}}<0$).
La résolution de cette équation conduit donc à $c(z)=c_0.\exp\left(\frac{-z}{z_R}\right)$ avec $z_R=-\frac{D}{v_{\mathrm{lim}}}$ (rappelons que $v_{\mathrm{lim}}<0$)

IV.6 d'après la question précédente, $z_R=-\frac{D}{v_{\mathrm{lim}}}$ avec : $v_{\mathrm{lim}}=-\frac{2R^2\rho_p g}{9\eta}$, $D=\frac{a^2}{2\Delta T}$, $a=\frac{\sqrt{2k_B T m}}{6\pi R\eta}$ et $\Delta T=\frac{m}{6\pi R\eta}=\frac{2R^2\rho_p}{9\eta}$. On trouve alors après calcul $z_R=\frac{3k_B T}{4\pi R^3\rho_p g}$

IV.7

Catégorie de particule	PM100	PM10	PM2,5	PM1	PM0,1
Rayon R	25 µm	2,5 µm	1,0 µm	0,50 µm	0,05 µm
z_R	2,5 pm	2,5 nm	38nm	0,31µm	310 µm

On se rend ainsi compte par ce calcul que le temps de séjour de nanoparticules dans l'atmosphérique est considérablement long. Ce genre de pollution met donc beaucoup de temps à se dissiper par sédimentation .

IV.8 Avec $m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_p$, on a $c(z)=c_0\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)=c_0\exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right)$ avec $E_p(z)=mgz$ l'énergie potentielle de pesanteur d'une particule

IV.9 R_{max} est tel que $z_R(R_{max})=R_{max}$, on a donc l'équation $R_{max}=\frac{3k_B T}{4\pi R_{max}^3\rho_p g}$
Ainsi $R_{max}=\left(\frac{3k_B T}{4\pi\rho_p g}\right)^{1/4}=4{,}4.10^2\ nm$

IV.10 Le problème qui se pose alors avec des nanoparticules est que leur poids n'est pas suffisamment important pour compenser les effets d'agitation thermique. Elles ne sédimentent donc plus et restent donc en suspension dans l'atmosphère. Une pollution de l'atmosphère par des nanoparticules est donc bien plus longue à dissiper.