E.P.I.T.A. 2018

Corrigé de l'épreuve optionnelle de mathématiques (2h)

1°) *Une propriété de la fonction de Möbius*

a) Par définition de μ, on a donc : $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(8) = 0$, $\mu(9) = 0$, $\mu(10) = 1$ et il en résulte que :

- $\mathcal{D}_1 = \{1\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_1} \mu(d) = \mu(1) = 1$,
- $\mathcal{D}_2 = \{1, 2\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_2} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) = 0$,
- $\mathcal{D}_3 = \{1, 3\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_3} \mu(d) = \mu(1) + \mu(3) = 0$,
- $\mathcal{D}_4 = \{1, 2, 4\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_4} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) = 0$,
- $\mathcal{D}_5 = \{1, 5\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_5} \mu(d) = \mu(1) + \mu(5) = 0$,
- $\mathcal{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_6} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6) = 0$.
- $\mathcal{D}_7 = \{1, 7\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_7} \mu(d) = \mu(1) + \mu(7) = 0$.
- $\mathcal{D}_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_8} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) + \mu(8) = 0$.
- $\mathcal{D}_9 = \{1, 3, 9\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_9} \mu(d) = \mu(1) + \mu(3) + \mu(9) = 0$.
- $\mathcal{D}_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$ et $\sum_{d \in \mathcal{D}_{10}} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(10) = 0$.

On peut donc conjecturer que la somme $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ vaut 1 pour $n = 1$, puis 0 pour $n \geq 2$.

b) Si $n = p_1^{r_1} \ldots p_q^{r_q}$, ses diviseurs sont les entiers $d = p_1^{s_1} \ldots p_q^{s_q}$ où $0 \leq s_1 \leq r_1, \ldots, 0 \leq s_q \leq r_q$.
Si l'un des entiers $s_1, \ldots, s_q$ est supérieur ou égal à 2, on sait que $\mu(d) = 0$.
Les diviseurs d de l'entier $n = p_1^{r_1} \ldots p_q^{r_q}$ pour lesquels on a $\mu(d) \neq 0$ sont donc les entiers :

- $d = 1$, où on a $\mu(d) = 1$.
- $d = p_i$, où $\{i\}$ est une partie à 1 élément de $[\![1, q]\!]$, où on a $\mu(d) = -1$.
  Il y a $\binom{q}{1}$ entiers d de ce type, correspondant aux parties $\{i\}$ à un élément de $[\![1, q]\!]$ avec $s_i = 1$.
- $d = p_{i_1} p_{i_2}$, où $\{i_1, i_2\}$ est une partie à 2 éléments de $[\![1, q]\!]$, où on a $\mu(d) = 1$.
  Il y a $\binom{q}{2}$ entiers d de ce type, correspondant aux parties $\{i_1, i_2\}$ à 2 éléments de $[\![1, q]\!]$.

....

- $d = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}$, où $\{i_1, \ldots, i_k\}$ est une partie à k éléments de $[\![1, q]\!]$, où on a $\mu(d) = (-1)^k$.
  Il y a $\binom{q}{k}$ entiers d de ce type, correspondant aux parties $\{i_1, \ldots, i_k\}$ à k éléments de $[\![1, q]\!]$.

....

- $d = p_1 p_2 \ldots p_q$, où $\{1, \ldots, q\}$ est l'unique partie à q éléments de $[\![1, q]\!]$, où on a $\mu(d) = (-1)^q$.
  Il y a $\binom{q}{q} = 1$ entier d de ce type, correspondant à la partie $\{1, \ldots, q\}$ à q éléments de $[\![1, q]\!]$.

On en déduit immédiatement l'égalité suivante :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = 1 - \binom{q}{1} + \binom{q}{2} - \ldots + (-1)^q \binom{q}{q} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k.$$

c) A l'aide de la formule du binôme, on voit que cette somme, pour $n \geq 2$, est égale à :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \ = \ (1-1)^q \ = \ 0.$$

2°) *La famille sommable* $\left(\mu(d) / \left(m^2 d^2\right)\right)$ *pour* $(m, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

a) Comme μ est à valeurs dans {-1, 0, 1}, on a $|\mu(d)| \leq 1$ pour tout entier $d \geq 1$, et donc :

$$\forall\, d \geq 1, \quad \left| \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \ \leq \ \frac{1}{d^2}.$$

La convergence de la série $\sum \frac{1}{d^2}$ implique donc l'absolue convergence de la série $\sum \frac{\mu(d)}{d^2}$.

b) Justifions la sommabilité de la famille $\left(\mu(d) / \left(m^2 d^2\right)\right)$ avec $m \geq 1$, $d \geq 1$.

Par définition, il s'agit d'étudier la sommabilité de la famille $\left(|\mu(d)| / \left(m^2 d^2\right)\right)$ où $m \geq 1$, $d \geq 1$.

Comme $|\mu(d)| \leq 1$, on remarque que :

$$\forall\, m, d \geq 1, \quad \left| \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} \right| \ \leq \ \frac{1}{m^2 d^2}.$$

Cette dernière famille est bien sommable d'après la version positive du théorème de Fubini :

- pour tout entier $d \geq 1$, la série $\sum 1 / \left(m^2 d^2\right)$ converge et sa somme est $\pi^2 / 6\, d^2$.
- la série $\sum \pi^2 / 6\, d^2$ converge, et sa somme est $\pi^4 / 36$.

(Ceci en se souvenant que la somme de la série de terme général $1 / n^2$ est égale à $\pi^2 / 6$).

La sommabilité de la famille proposée en résulte.

c) Calculons maintenant la somme de cette famille sommable.

- D'une part, en exploitant le théorème de Fubini, on a :

$$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) = \frac{\pi^2}{6} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

- D'autre part, en exploitant la partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ formée par les parties $P_n = \{(m, d) / md = n\}$ avec $n \geq 1$, on a avec le théorème de sommation par paquets :

$$\sum_{(m,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(m,d) \in P_n} \frac{\mu(d)}{m^2 d^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{(m,d) \in P_n} \mu(d) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = 1.$$

En effet, étant donné un entier $d \geq 1$, il existe un entier m tel que $(m, d) \in P_n$ si et seulement si d appartient à $\mathcal{D}_n$, et les sommes $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)$ sont nulles, sauf si $n = 1$, auquel cas elle vaut 1, ce qui justifie les égalités précédentes.

d) En comparant ces deux calculs de la somme de la famille $\left(\mu(n) / \left(m^2 n^2\right)\right)$, on déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

3°) *Une formule préliminaire*

a) Considérons les deux sommes suivantes :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor \quad ; \quad \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_q) \in \mathbb{N}^q} \mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1}\, p_2^{2r_2} \dots p_q^{2r_q}} \right\rfloor.$$

On sait que tout entier $d \in [\![1, n]\!]$ peut se factoriser à l'aide des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_q$ car ce sont les seuls nombres premiers inférieurs ou égaux à n, et s'écrire $d = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$.

Ainsi, tous les termes $\mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor$ de la 1ère somme s'écrivent $\mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1}\, p_2^{2r_2} \dots p_q^{2r_q}} \right\rfloor$ et tous les termes de la 1ère somme figurent donc dans la 2ème somme.

Inversement, les termes $\mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1}\, p_2^{2r_2} \dots p_q^{2r_q}} \right\rfloor$ de la 2ème somme figurent aussi dans la 1ère somme lorsque $d = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$ est inférieur ou égal à n, mais on remarque que si $d = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q} > n$, alors a fortiori $d^2 > n$, et donc $\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = 0$, ce qui ajoute donc à la somme des termes $\mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1}\, p_2^{2r_2} \dots p_q^{2r_q}} \right\rfloor$ qui sont égaux à 0.

Il en résulte que les deux sommes proposées sont égales :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_q) \in \mathbb{N}^q} \mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_1^{2r_1}\, p_2^{2r_2} \dots p_q^{2r_q}} \right\rfloor.$$

b) On sait que $\mu(d) = \mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right) = 0$ si et seulement si l'un des entiers r_i est supérieur ou égal à 2. Donc $\mu(d) = \mu\left(p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}\right)$ est non nul si et seulement s'il existe un entier k dans $[\![0, q]\!]$ et une partie $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ à k éléments de $[\![1, q]\!]$ tels que $d = p_{i_1}\, p_{i_2} \dots p_{i_k}$ (notons que $d = 1$ correspond au cas où $k = 0$, car un produit de 0 facteur est égal à 1). Ainsi donc, on a :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{q} \left(\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} \mu\left(p_{i_1}\, p_{i_2} \dots p_{i_k}\right) \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \dots p_{i_k}^2} \right\rfloor \right).$$

D'après la définition de la fonction de Möbius, on a $\mu\left(p_{i_1}\, p_{i_2} \dots p_{i_k}\right) = (-1)^k$, et par conséquent :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \left(\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \dots p_{i_k}^2} \right\rfloor \right).$$

4°) *Nombre des entiers sans facteur carré appartenant à* $[\![1, n]\!]$

a) Considérons un entier $d = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_q^{r_q}$ appartenant à $[\![1, n]\!]$.

- S'il existe un entier $i \in [\![1, q]\!]$ tel que $r_i \geq 2$, alors p_i^2 divise d et d a donc un facteur carré.
- Inversement, s'il existe $m \geq 2$ tel que m^2 divise d, considérons un diviseur premier p de m.
  Comme m^2 divise d, p^2 divise d, de sorte que p est un diviseur premier de d.
  Il existe donc $i \in [\![1, q]\!]$ tel que $p = p_i$ et comme $p^2 = p_i^2$ divise d, on a $r_i \geq 2$.

b) Ainsi, un entier $d = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \ldots p_q^{r_q} \in [\![1, n]\!]$ possède un facteur carré si et seulement s'il existe un entier $i \in [\![1, q]\!]$ tel que $r_i \geq 2$, donc si et seulement s'il existe $i \in [\![1, q]\!]$ tel que p_i^2 divise d, ce qui équivaut à dire $d \in P_i$. Il en résulte que $C_n = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_q$.

c) L'ensemble P_i est celui des multiples de p_i^2 qui sont inférieurs ou égaux à n, donc l'ensemble des entiers d s'écrivant $d = k\, p_i^2$ avec $1 \leq k\, p_i \leq n$. Ces entiers k sont supérieurs ou égaux à 1 et vérifient $k \leq n \big/ p_i^2$, soit $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{p_i^2} \right\rfloor$: il y en a donc $\left\lfloor \frac{n}{p_i^2} \right\rfloor$, d'où $|P_i| = \left\lfloor \frac{n}{p_i^2} \right\rfloor$.

L'ensemble $P_i \cap P_j$ est celui des multiples de p_i^2 et p_j^2 qui sont inférieurs ou égaux à n, et c'est l'ensemble des entiers $d \in [\![1, n]\!]$ dont la factorisation en nombres premiers contient p_i^2 et p_j^2. Ceux-ci s'écrivent $d = k\, p_i^2\, p_j^2$ et ils appartiennent à $[\![1, n]\!]$ si et seulement si $1 \leq k\, p_i^2\, p_j^2 \leq n$, ou encore $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{p_i^2\, p_j^2} \right\rfloor$: il y en a donc $\left\lfloor \frac{n}{p_i^2\, p_j^2} \right\rfloor$, d'où $\left| P_i \cap P_j \right| = \left\lfloor \frac{n}{p_i^2\, p_j^2} \right\rfloor$.

Le même raisonnement montre qu'on a $\left| P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k} \right| = \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rfloor$ pour $1 \leq k \leq q$.

d) D'après la formule du crible, on a donc :

$$| C_n | = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} \left| P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k} \right| \right).$$

D'après la question précédente, on a $\left| P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k} \right| = \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rfloor$, d'où :

$$| C_n | = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rfloor \right).$$

Le cardinal du complémentaire de C_n dans $[\![1, n]\!]$ est donc, compte tenu du résultat de 3° :

$$| \overline{C_n} | = n - | C_n | = \sum_{k=0}^{q} (-1)^{k} \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rfloor = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor.$$

En effet, pour $k = 0$, on a une seule partie à 0 élément, la partie vide, et puisqu'un produit de zéro facteur est conventionnellement égal à 1, on a bien $\left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^2\, p_{i_2}^2 \cdots p_{i_k}^2} \right\rfloor = \lfloor n \rfloor = n$ pour $k = 0$.

5°) *Probabilité p_n pour qu'un entier de $[\![1, n]\!]$ soit sans facteur carré*

a) Puisque tous les entiers de $[\![1, n]\!]$ sont supposés équiprobables, on a :

$$p_n = \mathbb{P}(\overline{C_n}) = \frac{| \overline{C_n} |}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor.$$

b) Comme $\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor = 0$ si $d > \sqrt{n}$, la sommation peut être aussi faite pour $1 \leq d \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et :

$$\left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| = \left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(d) \left(\frac{n}{d^2} - \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor \right) \right|$$

Sachant que $|\mu(d)| \leq 1$ et $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, on en déduit maintenant :

$$\left| \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} - p_n \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} |\mu(d)| \left(\frac{n}{d^2} - \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} 1 \leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

c) Cette différence tend donc vers 0 et il résulte de la partie I que :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{d=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$