E.P.I.T.A. 2018

Corrigé de l'épreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

■ PROBLÈME I : La série harmonique

1°) *Question préliminaire*

La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est clairement croissante puisqu'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$.

Et on sait qu'une suite réelle croissante est soit convergente vers une limite finie L (si elle est majorée), soit divergente vers $+\infty$ (si elle n'est pas majorée).

2°) *Première méthode*

a) On note aussitôt que :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Comme $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ pour $k \leq 2n$, il en résulte que :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

b) Supposons que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre réel L. Le passage à la limite dans l'inégalité précédente donne alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (H_{2n} - H_n) = \lim_{n\to+\infty} H_{2n} - \lim_{n\to+\infty} H_n = L - L = 0 \geq \frac{1}{2}.$$

Ce résultat contradictoire prouve que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers un nombre réel L, et d'après le résultat de la question 1°, on en déduit que $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

3°) *Deuxième méthode*

a) L'inégalité de la moyenne donne pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} = ((k+1)-k) \min_{k\leq t\leq k+1}\left(\frac{1}{t}\right) \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq ((k+1)-k) \max_{k\leq t\leq k+1}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{k}.$$

b) Par sommation de ces inégalités pour $1 \leq k \leq n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Quitte à faire un changement d'indices et à exprimer les sommes en fonction de H_n, on a :

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que : $\forall\, n \geq 1,\ \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

c) Comme ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$, l'inégalité $\ln(n) \leq H_n$ montre que $\lim_{+\infty} H_n = +\infty$.
De plus, en divisant l'inégalité précédente par $\ln(n)$ (strictement positif pour $n \geq 2$), on a :

$$1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Par passage à la limite, on en déduit $\lim_{+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, soit $H_n \sim \ln(n)$.

d) Comme $\gamma_n = H_n - \ln(n)$, on a :

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} - (\ln(n) - \ln(n-1)) = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 0.$$

La suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante, et l'inégalité $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ qui s'écrit $0 \leq \gamma_n \leq 1$ montre qu'elle est minorée par 0. Elle est donc convergente et sa limite γ vérifie donc $0 \leq \gamma \leq 1$.
Finalement, on a :

$$H_n = \ln(n) + \gamma_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

■ PROBLÈME II : Etude d'intégrales

A] *Cas où la fonction f est définie par $f(t) = \frac{P(t)}{t^2+1}$ avec P polynômiale*

a) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = 1$, donc que $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

On obtient facilement, pour tout réel t :

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{4t^2+1}\right) = \frac{3t}{\left(4t^2+1\right)\left(t^2+1\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4t^3}.$$

Comme la fonction proposée est continue sur $[0, +\infty[$, positive et équivalente à $3/4t^3$ en $+\infty$, on peut affirmer que son intégrale converge.

- Le changement de variable $u = t^2$ donne alors :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{3t\,\mathrm{d}t}{\left(4t^2+1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(4u+1)(u+1)}$$

- Un rapide calcul par identification (ou une décomposition en éléments simples) montre que :

$$\frac{3}{2(4u+1)(u+1)} = \frac{a}{4u+1} + \frac{b}{u+1} = \frac{2}{4u+1} - \frac{1}{2(u+1)}.$$

- Il en résulte qu'on a :

$$I(f) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{4u+1} - \frac{1}{2(u+1)}\right)\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4u+1}{u+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2).$$

b) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t$, donc que $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$, d'où :

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t^2+1} \quad \text{et} \quad \frac{f(2t)}{t} = \frac{2}{4t^2+1.}$$

Les fonctions proposées étant continues sur $[0, +\infty[$ et équivalentes à $1/t^2$ et $1/2\,t^2$ en $+\infty$, leurs intégrales convergent, et comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Arctan}(t)) = \frac{1}{t^2+1}$, donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Arctan}(2\,t)) = \frac{2}{4\,t^2+1}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{4\,t^2+1} = [\mathrm{Arctan}(2\,t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

La convergence de ces deux intégrales implique celle de $I(f)$, et on a donc :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

c) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^2$, donc que $f(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

- En posant $u = t^2$ dans les intégrales suivantes, on obtient pour tout réel positif A :

$$\int_0^{A} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{A} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\mathrm{d}u}{u+1} = \frac{1}{2}\ln\left(A^2+1\right).$$

$$\int_0^{A} \frac{f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{A} \frac{4\,t\,\mathrm{d}t}{4\,t^2+1} = 2\int_0^{A^2} \frac{\mathrm{d}u}{4\,u+1} = \frac{1}{2}\ln\left(4\,A^2+1\right).$$

- On en déduit que :

$$\int_0^{A} \frac{f(t)-f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\ln\left(A^2+1\right) - \ln\left(4\,A^2+1\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4\,A^2+1}{A^2+1}\right).$$

Comme cette expression a clairement une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que l'intégrale $I(f)$ converge et vaut :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} \ln\left(\frac{4\,A^2+1}{A^2+1}\right) = -\frac{1}{2}\ln(4) = -\ln(2).$$

d) On suppose enfin que $P(t) = a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \frac{a_2\,t^2+a_1\,t+a_0}{t^2+1}$.

D'après les résultats précédents, les trois intégrales $I(f_0)$, $I(f_1)$, $I(f_2)$ où $f_k(t) = t^k$ convergent. Comme on a $f = a_2\,f_2 + a_1\,f_1 + a_0\,f_0$, on déduit par linéarité des intégrales convergentes que :

$$I(f) = a_2\,I(f_2) + a_1\,I(f_1) + a_0\,I(f_0) = (a_0 - a_2)\ln(2).$$

e) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^3$, donc que $f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$. On a donc :

$$\frac{f(t)-f(2\,t)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{t^3}{t^2+1} - \frac{8\,t^3}{4\,t^2+1}\right) = \frac{-4\,t^4 - 7\,t^2}{\left(t^2+1\right)\left(4\,t^2+1\right)} \underset{+\infty}{\sim} -1.$$

Comme l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de la fonction constante -1 diverge, $I(f)$ diverge aussi.

Si maintenant $f(t) = \frac{t^n}{t^2+1}$ avec $n \geq 3$, on a de même :

$$\frac{f(t)-f(2\,t)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{t^n}{t^2+1} - \frac{2^n\,t^n}{4\,t^2+1}\right) = \frac{(4-2^n)\,t^{n+1} - (2^n-1)\,t^{n-1}}{\left(t^2+1\right)\left(4\,t^2+1\right)} \underset{+\infty}{\sim} \left(1-2^{n-2}\right)t^{n-3}.$$

Comme l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de la fonction $t \longrightarrow t^{n-3}$ diverge pour $n \geq 3$, $I(f)$ diverge aussi.

B] *Cas où la fonction f est définie par $f(t) = e^{-t}$*

1°) *Convergence de l'intégrale $I(f)$*

a) Compte tenu du développement limité de l'exponentielle en 0, on a :

$$\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \frac{(1 - t + o(t)) - (1 - 2t + o(t))}{t} = 1 + o(1) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

La fonction $t \longrightarrow \frac{f(t)-f(2t)}{t}$ peut ainsi être prolongée par sa limite 1 en $t = 0$.

b) On a $\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puisque :

$$\lim_{t \to 0} t^2\left(\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right) = \lim_{t \to 0}\left(t\,e^{-t} - t\,e^{-2t}\right) = 0.$$

c) La fonction $t \longrightarrow \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ est continue sur $]\,0, +\infty[$, prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$: son intégrale est donc convergente et on peut poser :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2°) *Calcul de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$*

a) Les fonctions $t \longrightarrow \frac{e^{-t}}{t}$ et $t \longrightarrow \frac{e^{-2t}}{t}$ sont continues sur $]\,0, +\infty[$ et négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$: pour tout réel $\varepsilon > 0$, les intégrales $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Par linéarité des intégrales convergentes, l'intégrale $I(f)$ converge aussi et on a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En posant $u = 2t$ dans la dernière intégrale, on obtient :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Ce qu'on peut encore écrire de la sorte :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u}\,\mathrm{d}u + \ln(2).$$

b) La limite quand u tend vers 0 de la fonction $h : u \longrightarrow \frac{e^{-u}-1}{u}$ est -1 car $e^{-u} = 1 - u + o(u)$.

La fonction h est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ ainsi qu'en 0 puisque $h(0) = -1 = \lim_{u \to 0} h(u)$.

Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u}\,\mathrm{d}u = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon).$$

c) Compte tenu des résultats obtenus, on a donc :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln(2).$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient la valeur de l'intégrale $I(f)$:

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} (H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln(2)) = H(0) - H(0) + \ln(2) = \ln(2).$$

3°) *Application au calcul d'une intégrale*

En posant $t = -\ln(u)$ ou $u = e^{-t}$ dans cette intégrale (c'est bien un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$, qui ne change ni la nature, ni la valeur de l'intégrale), il vient alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \frac{u - u^2}{-\ln(u)} \frac{-\mathrm{d}u}{u} = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(2).$$
