E.P.I.T.A. 2018

Corrigé de l'épreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

■ PARTIE I : Etude de F lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

1°) *Etude d'un cas particulier*

a) On suppose dans cette question que : $\forall\, t \geq 0,\ f(t) = \frac{p\,t^2+q}{t^2+1}$, d'où maintenant :

$$\frac{f(x\,t)-f(t)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{p\,x^2\,t^2+q}{x^2\,t^2+1}-\frac{p\,t^2+q}{t^2+1}\right) = \frac{(p-q)\left(x^2-1\right)t}{\left(x^2\,t^2+1\right)\left(t^2+1\right)}.$$

Un rapide calcul par identification (ou une décomposition en éléments simples) montre que :

$$\frac{\left(x^2-1\right)t}{\left(x^2\,t^2+1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{a_x\,t}{x^2\,t^2+1}+\frac{b_x\,t}{t^2+1} = \frac{x^2\,t}{x^2\,t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}.$$

Il en résulte qu'on a pour $x > 0$ et $t \geq 0$:

$$\frac{f(x\,t)-f(t)}{t} = \frac{(p-q)\left(x^2-1\right)t}{\left(x^2\,t^2+1\right)\left(t^2+1\right)} = (p-q)\left(\frac{x^2\,t}{x^2\,t^2+1}-\frac{t}{t^2+1}\right).$$

b) Le changement de variable $u = t^2$ conduit à :

$$\int_0^A \frac{f(x\,t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{p-q}{2}\int_0^{A^2}\left(\frac{x^2}{x^2\,u+1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{p-q}{2}\left[\ln\left(\frac{x^2\,u+1}{u+1}\right)\right]_0^{A^2} = \frac{p-q}{2}\ln\left(\frac{x^2\,A^2+1}{A^2+1}\right).$$

Enfin, lorsque A tend vers $+\infty$, cette intégrale admet une limite finie, ce qui établit l'existence et donne la valeur de l'intégrale $F(x)$ pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{f(x\,t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{p-q}{2}\ln\left(x^2\right) = (p-q)\ln(x).$$

c) Comme on observe que $L = \lim_{+\infty} f = p$ et $f(0) = q$, on a donc de façon équivalente :

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{f(x\,t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = (L-f(0))\ln(x).$$

2°) *Etude de F(x) pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$*

a) Pour $0 < \varepsilon < A$, on a en posant $u = x\,t$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{A\,x}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La relation de Chasles de $\varepsilon\,x$ à $A\,x$ en passant par les valeurs intermédiaires ε et A donne :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{\varepsilon}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_A^{A\,x}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_A^{A\,x}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^{\varepsilon\,x}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b) En posant respectivement $t = \frac{u}{A}$ et $t = \frac{u}{\varepsilon}$ dans ces deux dernières intégrales, on obtient :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(A\,t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

c) La fonction f admet une limite finie L en $+\infty$: on a donc $|f(x) - L| \leq 1$ pour x assez grand, disons pour $x \geq a$. On en déduit que :

- la fonction f est continue est bornée par un réel M sur le compact $[0, a]$.
- pour $x \geq a$, on a $|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L|$.

Ainsi, f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,/\, x \geq 0\} \leq \max(M,\ 1 + |L|)$.

d) Appliquons le théorème de convergence dominée à $\int_1^x \frac{f(A\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ en supposant $x \geq 1$:

- pour tout $t \in [1, x]$, la limite de $\frac{f(A\,t)}{t}$ lorsque A tend vers $+\infty$ est $\frac{L}{t}$.
- pour tout $t \in [1, x]$, pour tout $A > 0$, on a $\left|\frac{f(A\,t)}{t}\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{t}$.

Cette dernière fonction étant continue est intégrable sur le segment $[1, x]$, et on a donc :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^x \frac{f(A\,t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^x \frac{L}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; L\ln(x).$$

De même, en appliquant le théorème de convergence dominée à $\int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ en supposant $x \geq 1$:

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_1^x \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; f(0)\ln(x).$$

Si $0 < x \leq 1$, on obtient les mêmes résultats en adaptant les raisonnements précédents.

e) En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient compte tenu de 2.a), 2.b) et 2.d) la convergence de l'intégrale $F(x)$ pour $x > 0$ ainsi que sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; (L - f(0))\ln(x).$$

Et on retrouve ainsi de façon générale le résultat obtenu pour la fonction f de la question 1.

3°) *Application aux cas où* $f(t) = \mathrm{Arctan}(t)$ *et* $f(t) = e^{-t}$

a) La fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}_+$, nulle en 0 et de limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Le résultat précédent s'applique donc et donne :

$$\forall\, x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x\,t) - \mathrm{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(x).$$

En particulier, on en déduit pour $a > 0$, $b > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(a\,t) - \mathrm{Arctan}(b\,t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; F(a) - F(b) \;=\; \frac{\pi}{2}\ln\!\left(\frac{a}{b}\right).$$

b) La fonction $t \longrightarrow e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, égale à 1 en 0 et de limite 0 en $+\infty$.

Le résultat précédent s'applique donc et donne :

$$\forall\, x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t} - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln(x).$$

■ PARTIE II : Etude de $F(x)$ lorsque $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

4°) *Etude du cas particulier où l'intégrale impropre* $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge*

On suppose dans cette question que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Pour $0 < \varepsilon < A$ et pour tout réel $x > 0$, on a en posant $u = x\,t$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

b) On en déduit aussitôt, pour tout réel strictement positif x :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

5°) *Application au cas où* $f(t) = \sin(t)$

a) Comme $t \longrightarrow 1 - \cos(t)$ est une primitive de $t \longrightarrow \sin(t)$, une intégration par parties donne :

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) Comme $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$, on a $\frac{1-\cos(t)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$, d'où $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$.

Et comme $0 \leq 1 - \cos(t) \leq 2$, on a immédiatement $\lim_{t \to +\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$.

Ainsi, le crochet précédent a pour limite 0 lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$.

c) De même, on a $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$, d'où $\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction positive $t \longrightarrow \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

Et comme $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est bien convergente.

En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$ dans l'intégration par parties obtenue précédemment, on obtient la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

d) Nous sommes donc dans les hypothèses de la question 4, et on en déduit que :

$$\forall\, x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t) - \sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

6°) *Etude de F(x) pour x > 0 lorsque l'intégrale impropre* $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge*

a) Pour $0 < \varepsilon < A$, on a en posant $u = x\,t$ comme à la question 2 :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^A \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La relation de Chasles de $\varepsilon\,x$ à $A\,x$ en passant par les valeurs intermédiaires ε et A donne :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_\varepsilon^{\varepsilon\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, en posant $t = \frac{u}{\varepsilon}$ dans la dernière intégrale, on obtient :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b) On a de façon immédiate :

$$\int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^A \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

D'après la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, il vient lorsque A tend vers $+\infty$:

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = 0.$$

c) Appliquons encore le théorème de convergence dominée à $\int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ en supposant $x \geq 1$:

- pour tout $t \in [1, x]$, la limite de $\frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque ε tend vers 0 est $\frac{f(0)}{t}$.
- pour tout $t \in [1, x]$, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, le réel $\varepsilon\,t$ appartient à $[0, x]$.
  Comme f est continue sur le segment $[0, x]$, elle y est bornée par un réel M_x et :

$$\forall\, t \in [1, x] \text{ (ou } [x, 1]),\ \forall\, \varepsilon \in\,]0, 1],\quad \left|\frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\right| \leq \frac{M_x}{t}.$$

  Cette dernière fonction est bien intégrable sur le segment $[1, x]$, et on a donc :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln(x).$$

Si $0 < x \leq 1$, on obtient les mêmes résultats en adaptant les raisonnements précédents.

d) On a établi à la question 6.a) l'égalité suivante :

$$\int_\varepsilon^A \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_A^{A\,x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{f(\varepsilon\,t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient compte tenu de 6.b) et 6.c) la convergence de l'intégrale $F(x)$ pour $x > 0$ ainsi que sa valeur :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x\,t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -f(0)\ln(x).$$

7°) *Application aux cas où* $f(t) = e^{i\,t}$ *et* $f(t) = \cos(t)$

a) Une intégration par parties donne facilement pour tout $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{i\,t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i\,t}}{i\,t}\right]_1^A - i\int_1^A \frac{e^{i\,t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) Comme $\left|\frac{e^{iA}}{iA}\right| = \frac{1}{A}$, l'expression $\frac{e^{iA}}{iA}$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$, et par conséquent :

$$\lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{e^{iA}}{iA} - \frac{e^i}{i}\right) = -\frac{e^i}{i} = i\, e^i.$$

D'autre part, la fonction $t \longrightarrow \frac{e^{it}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et son module vaut $\left|\frac{e^{it}}{t^2}\right| = \frac{1}{t^2}$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}\, dt$ est absolument convergente.

Une intégrale absolument convergente étant convergente, il en résulte que :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{e^{it}}{t}\, dt = i\, e^i - i \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}\, dt.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\, dt$ est convergente.

c) Nous sommes donc dans les hypothèses de la question 6, et on en déduit que :

$$\forall x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - e^{it}}{t}\, dt = -\ln(x).$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient le résultat suivant pour $f(t) = \cos(t)$ et on retrouve le résultat déjà obtenu pour $f(t) = \sin(t)$:

$$\forall x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\,t) - \cos(t)}{t}\, dt = -\ln(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t) - \sin(t)}{t}\, dt = 0.$$

■ PARTIE III : Une autre méthode de calcul lorsque $f(t) = e^{-t}$ et $f(t) = e^{it}$

8°) *Etude des fonctions U et V*

a) Par développement limité, la limite en 0 de la fonction $t \longrightarrow \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ est égale à $1 - x$.

De même, la limite en 0 de la fonction $t \longrightarrow \frac{e^{itx} - e^{it}}{t}$ est égale à $i(x - 1)$.

Ainsi prolongées en 0 par ces deux valeurs, ces deux fonctions sont continues sur $[0, +\infty[$.

b) Les deux intégrales $U(x, R)$ et $V(x, R)$ existent donc pour $x > 0$ et $R \geq 0$ en tant qu'intégrales de fonctions continues sur un segment.

Et pour $x > 0$, les deux fonctions $R \longrightarrow U(x, R)$ et $R \longrightarrow V(x, R)$ sont donc des primitives de ces fonctions continues ; ainsi, elles sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) = \frac{e^{-Rx} - e^{-R}}{R} \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) = \frac{e^{iRx} - e^{iR}}{R}.$$

9°) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$*

a) Pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \longrightarrow \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0, on a vu qu'elle est prolongeable par continuité par la valeur $1 - x$ en 0.

Au voisinage de $+\infty$, on remarque que $\left|\frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\right| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, on en déduit la convergence de l'intégrale $u(x)$.

b) On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral :
- on a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-t\,x}-e^{-t}}{t}\right) = -e^{-t\,x}$, et cette fonction est continue par rapport à ses variables x et t.
- pour $a \leq x \leq b$ (où $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$), on a la domination suivante, indépendante de x :

$$\forall\, t > 0, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-t\,x} - e^{-t}}{t}\right)\right| = \left|-e^{-t\,x}\right| = e^{-t\,x} \leq e^{-t\,a}.$$

Comme la fonction $t \longrightarrow e^{-t\,a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que u est de classe C^1 sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$u'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-t\,x} - e^{-t}}{t}\right) \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-t\,x}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{x}.$$

c) Comme $u(1) = 0$, il en résulte qu'on a :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x} - e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = -\ln(x).$$

10°) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$*

a) L'intégrale $\varphi(x, R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}\, \mathrm{d}t$ est définie pour tout $x > 0$ et $R \geq 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et comme c'est une intégrale dépendant du paramètre R, on lui applique le théorème de dérivation propre à ce type d'intégrale :
- on a $\frac{\partial}{\partial R}\left(e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}\right) = -x\,e^{-i\,t}\,e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}$, qui est continue en x et en t.
- pour $R \geq 0$, on a la domination suivante, indépendante du paramètre R :

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \left|-x\,e^{-i\,t}\,e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}\right| = x\,e^{-R\,x\cos(t)} \leq x.$$

Comme la fonction constante $t \longrightarrow x$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $R \longrightarrow \varphi(x, R)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour $x > 0$ et $R \geq 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial R}\left(e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}\right) \mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,e^{-i\,t}\,e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}\, \mathrm{d}t.$$

On calcule alors l'intégrale précédente, en remarquant que la fonction $t \longrightarrow x\,e^{-i\,t}\,e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}$ est la dérivée de la fonction $t \longrightarrow \frac{1}{i\,R}\,e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) = \left[-\frac{1}{i\,R}\,e^{-x\,R\,e^{-i\,t}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i\,R}\left(e^{-x\,R} - e^{i\,x\,R}\right).$$

b) Les résultats précédents montrent que :

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) = \frac{e^{-R\,x} - e^{-R}}{R} - \frac{e^{i\,R\,x} - e^{i\,R}}{R}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial \varphi}{\partial R}(1, R) = \frac{1}{i\,R}\left(e^{-x\,R} - e^{i\,x\,R}\right) - \frac{1}{i\,R}\left(e^{-R} - e^{i\,R}\right).$$

On obtient bien l'égalité voulue :

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x, R) - \frac{\partial V}{\partial R}(x, R) = i\,\frac{\partial \varphi}{\partial R}(x, R) - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial R}(1, R).$$

Les fonctions $R \longrightarrow U(x, R) - V(x, R)$ et $R \longrightarrow i\,\varphi(x, R) - i\,\varphi(1, R)$ ont donc même dérivée et il est clair qu'elles sont égales en $R = 0$, où elles valent 0. Il en résulte qu'elles sont égales :

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, R \geq 0, \quad U(x, R) - V(x, R) = i\,\varphi(x, R) - i\,\varphi(1, R).$$

c) Cherchons pour $x > 0$ la limite de $\varphi(x, R)$ lorsque R tend vers $+\infty$.
Appliquons à cet effet le théorème de convergence dominée :
- pour $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, la limite de $e^{-x R e^{-i t}}$ lorsque R tend vers $+\infty$ est nulle.
  En effet, on a $\left|e^{-x R e^{-i t}}\right| = e^{-x R \cos(t)}$, qui tend clairement vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.
- pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $R \geq 0$, on a $\left|e^{-x R e^{-i t}}\right| = e^{-x R \cos(t)} \leq 1$.
  Cette fonction $t \longrightarrow 1$ est bien intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a donc :

$$\lim_{R \to +\infty} \varphi(x, R) = \lim_{R \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x R e^{-i t}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{R \to +\infty} e^{-x R e^{-i t}}\, \mathrm{d}t = 0.$$

d) Examinons la relation obtenue ci-dessus en 10.b) lorsque R tend vers $+\infty$:

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, R \geq 0, \quad U(x, R) - V(x, R) = i\,\varphi(x, R) - i\,\varphi(1, R).$$

On remarque que :
- au membre de droite, $\varphi(x, R)$ et $\varphi(1, R)$ tendent donc vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.
- au membre de gauche, $U(x, R)$ tend vers l'intégrale convergente $u(x)$ lorsque R tend vers $+\infty$.

Comme il y a quatre termes dans l'égalité, le quatrième, qui est $V(x, R)$, a aussi une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$, ce qui établit l'existence de :

$$\lim_{R \to +\infty} V(x, R) = \lim_{R \to +\infty} \int_0^{R} \frac{e^{i t x} - e^{i t}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{i t x} - e^{i t}}{t}\, \mathrm{d}t = v(x).$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans l'égalité $U(x, R) - V(x, R) = i\,\varphi(x, R) - i\,\varphi(1, R)$, on a donc :

$$u(x) - v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t x} - e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{i t x} - e^{i t}}{t}\, \mathrm{d}t = 0.$$

Et d'après le calcul déjà réalisé de $u(x)$ à la question 9, on retrouve bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{i t x} - e^{i t}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t x} - e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = -\ln(x).$$