E.P.I.T.A. 2015

Corrigé de l'épreuve optionnelle de mathématiques (2h)

PARTIE I : préliminaires sur les séries de Riemann

1°) *Etude de la série de Riemann pour* $x = 1$

a) La fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$, ce qui conduit à l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{1}{n}.$$

b) Par sommation pour $1 \leq n \leq p-1$, on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n}.$$

Quitte à poser $n' = n+1$ dans la première somme, ceci s'écrit encore :

$$H_p - 1 \leq \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(p) \leq H_p - \frac{1}{p}.$$

c) On en déduit aussitôt que $\ln(p) \leq H_p \leq \ln(p) + 1$ pour $p \geq 1$.

La suite définie par $v_p = H_p - \ln(p)$ est donc bornée puisqu'elle est à valeurs dans $[0, 1]$, et elle est décroissante comme il apparaî en exploitant l'inégalité (a) précédente :

$$\begin{aligned} v_{p+1} - v_p &= \big(H_{p+1} - \ln(p+1)\big) - \big(H_p - \ln(p)\big) \\ &= \frac{1}{p+1} - (\ln(p+1) - \ln(p)) = \frac{1}{p+1} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 0. \end{aligned}$$

La suite $p \longrightarrow v_p = H_p - \ln(p)$ converge puisqu'elle est décroissante minorée, et si γ est sa limite, on a donc $\lim\big(H_p - \ln(p) - \gamma\big) = 0$, soit $H_p = \ln(p) + \gamma + o(1)$.

2°) *Etude de la série de Riemann pour* $x > 1$

a) La fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t^x}$ étant décroissante sur $[n, n+1]$, on a l'encadrement proposé.

b) Par sommation, on en déduit pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x > 1$:

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1 - p^{1-x}}{x-1} \leq \frac{1}{x-1}.$$

La suite $n \longrightarrow \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^x}$ est donc croissante et majorée par $\frac{1}{x-1}$. Elle converge donc et on a :

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}.$$

Il en résulte que $1 \leq \zeta(x) \leq 2$ pour $x \geq 2$, puisque $\frac{1}{x-1} \leq 1$ pour $x \geq 2$.

PARTIE II : Etude de la fonction *F*

3°) *Convergence de la série définissant F*

a) Pour $x > -1$, tous les termes $\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ sont bien définis, car $1 + \frac{x}{n} > 1 - \frac{1}{n} > 0$.

Et la série $\sum\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ converge simplement sur $I =]-1, +\infty[$ car c'est une série à termes positifs (d'après la concavité du logarithme) tels que :

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2\,n^2}.$$

b) On remarque que u_n est décroissante sur]-1, 0] et croissante sur [0, +∞[car :

$$u_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

c) Le terme général u_n décroît jusqu'à son minimum 0 en $x = 0$, puis croît ensuite, d'où :

- si $-1 < a \leq 0$, $\sup_{a \leq x \leq 0} |u_n(x)| = \sup_{a \leq x \leq 0} u_n(x) = u_n(a) \sim \frac{a^2}{2\,n^2}$.

  On en déduit la convergence normale de la série sur $[a, 0]$ si $-1 < a \leq 0$.

- si $b \geq 0$, $\sup_{0 \leq x \leq b} |u_n(x)| = \sup_{0 \leq x \leq b} u_n(x) = u_n(b) \sim \frac{b^2}{2\,n^2}$.

  On en déduit la convergence normale de la série sur $[0, b]$.

Et la série converge donc normalement sur tout segment $[a, b]$ où $-1 < a \leq 0 \leq b$.

d) Le terme général de la série de fonctions étudiée est continu sur $I =]-1, +\infty[$.
Et la série de fonctions converge normalement, donc uniformément sur tout $[a, b] \subset I$.
On en déduit que la somme de la série est continue sur tout segment $[a, b] \subset I$, et comme pour tout réel $x_0 > -1$, il existe a, b avec $-1 < a \leq 0 \leq b$ tels que $a < x_0 < b$, on en tire que la somme de la série est continue en tout $x_0 \in I$, et donc sur I.

4°) *Equation fonctionnelle vérifiée par F*

a) Considérons pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x > -1$ l'expression suivante :

$$\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right)\right) - \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = H_p - \sum_{n=1}^{p}\ln\left(\frac{x+n+1}{x+n}\right).$$

Ce qui donne, compte tenu de $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et en faisant un changement d'indices :

$$H_p - \sum_{n=2}^{p+1}\ln(x+n) + \sum_{n=1}^{p}\ln(x+n) = \ln(x+1) + H_p - \ln(x+p+1).$$

b) En faisant apparaître $H_p - \ln(p)$ qui tend vers γ, on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right)\right) - \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \ln(x+1) + H_p - \ln(p) - \ln\left(\frac{x+p+1}{p}\right).$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, et compte tenu de la question préliminaire, il vient pour $x > -1$:

$$F(x+1) - F(x) = \ln(x+1) + \gamma.$$

c) Ecrivons la relation sous la forme $F(x) = -\ln(1+x) - \gamma + F(x+1)$.
Comme F est continue en 0, on observe que $F(x+1)$ tend vers $F(0) = 0$ si x tend vers -1, donc $F(x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers -1, et plus précisément $F(x) = -\ln(1+x) - \gamma + o(1)$.
Il en résulte que $F(x) \sim -\ln(1+x)$ quand x tend vers -1.

d) Grâce à cette relation fonctionnelle, on obtient également les relations suivantes :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad F(k+1) - F(k) = \ln(1+k) + \gamma$$

Par sommation pour $0 \le k \le m-1$, on en déduit que : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ F(m) = \ln(m!) + m\gamma$.

5°) *Convergence de la série-dérivée de F*

a) La série-dérivée de F est la série de fonctions $\sum u_n'(x) = \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum \frac{x}{n(n+x)}$.
Elle converge simplement sur I car pour tout réel $x \in I$, on a $\frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}$, terme général d'une série convergente à termes de signe constant.

b) Pour étudier sa convergence normale sur les segments inclus dans I, notons que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{n(n+x)}\right) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On en déduit donc que le terme général croît en s'annulant en $x = 0$, d'où :
- si $-1 < a \le 0$, $\sup_{a \le x \le 0}\left|\frac{x}{n(n+x)}\right| = \frac{|a|}{n(n+a)} \sim \frac{|a|}{n^2}$.
  On en déduit la convergence normale de la série sur $[a, 0]$.
- si $b \ge 0$, $\sup_{0 \le x \le b}\left|\frac{x}{n(n+x)}\right| = \frac{b}{n(n+b)} \sim \frac{b}{n^2}$.
  On en déduit la convergence normale de la série sur $[0, b]$.

On en tire comme plus haut la convergence normale sur tout $[a, b]$ où $-1 < a \le 0 \le b$.

c) On observe que :
- le terme général de la série de fonctions définissant F est de classe C^1 sur I.
- la série de fonctions définissant F converge simplement sur I.
- la série-dérivée converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$.

On en déduit que la somme F de la série de fonctions est de classe C^1 sur I, et que :

$$\forall\, x \in I, \quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}.$$

d) On observe que $F'(0) = 0$, et en exploitant la suite des sommes partielles de $F'(1)$:

$$F'(1) = \lim_{p \to +\infty}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{p \to +\infty}\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

6°) *Etude de F au voisinage de $+\infty$*

a) Comme la série est à termes positifs, sa somme est supérieure à son premier terme.
On a donc $F(x) \ge x - \ln(1+x)$, ce qui implique $\lim_{+\infty} F = +\infty$.

b) Calculons l'intégrale proposée, qui converge car la fonction intégrée est continue sur I, positive et équivalente en $+\infty$ à $t \longrightarrow x/t^2$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t(t+x)} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{t+x}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x).$$

c) Par décroissance de la fonction intégrée, on a pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{x}{(n+1)\,(n+1+x)} \leq \int_n^{n+1} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t(t+x)} \leq \frac{x}{n(n+x)}.$$

Par sommation pour $n \geq 1$, on en déduit que :

$$F'(x) - \frac{x}{x+1} \leq \int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t(t+x)} \leq F'(x).$$

Compte tenu du calcul précédent de l'intégrale, on en déduit l'encadrement suivant :

$$\ln(1+x) \leq F'(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}.$$

Il en résulte que $F'(x) \sim \ln(1+x) \sim \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$.

d) Par intégration sur $[0, x]$ avec $x \geq 0$, on a compte tenu de $F(0) = 0$:

$$\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \leq F(x) \leq \int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Des intégrations classiques donnent :

$$\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = (x+1)\ln(x+1) - x \quad ; \quad \int_0^x \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = x - \ln(x+1).$$

En reportant, on a donc :

$$(x+1)\ln(x+1) - x \leq F(x) \leq x\ln(x+1).$$

Les deux extrémités sont clairement équivalentes à $x\ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, d'où l'équivalent $F(x) \sim x\ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Notons qu'on pourrait directement aussi exploiter le théorème d'intégration des équivalents pour les fonctions continues positives dont l'intégrale en $+\infty$ diverge.

7°) *La fonction F est de classe C^∞ sur I*

a) On sait déjà que F est de classe C^1 sur $[-1, +\infty[$ avec :

$$\forall\, x \in I, \quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

- On peut lui appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions car :
- le terme général $x \longrightarrow \frac{x}{n(n+x)}$ est C^1 sur $I =]-1, +\infty[$.
- la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ converge simplement sur $I =]-1, +\infty[$.
- la série-dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I =]-1, +\infty[$ puisqu'on a $\sup_{a \leq x \leq b} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{1}{(n+a)^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, F' est de classe C^1 et donc F de classe C^2 sur $I =]-1, +\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in I, \quad F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

• Supposons alors, pour un entier $k \geq 2$, que F soit de classe C^k sur I avec :

$$\forall\, x \in I, \quad F^{(k)}(x) = (-1)^k\,(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^k}.$$

En réappliquant de même le théorème de dérivation des séries de fonctions, on montre que $F^{(k)}$ est de classe C^1 sur I et que sa dérivée est donnée par sa série-dérivée, soit :

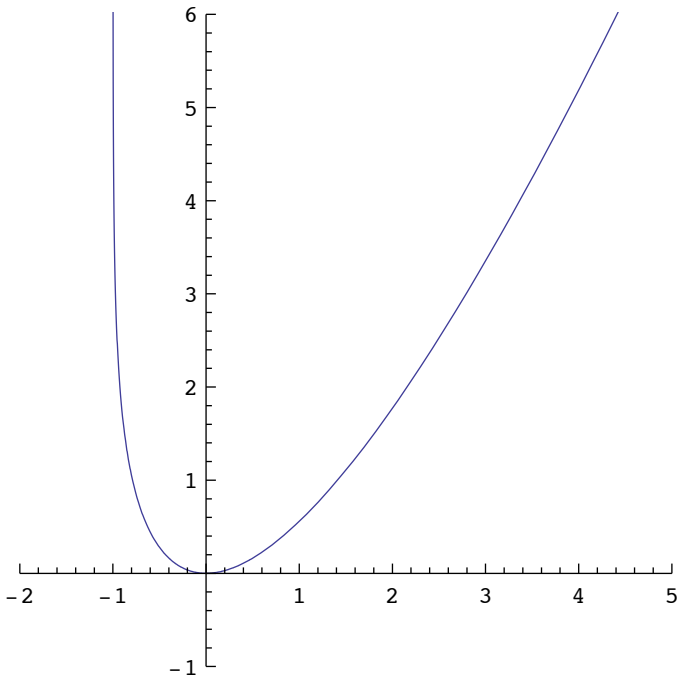
$$\forall\, x \in I, \quad F^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\,k!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

Ceci justifie que F est de classe C^{k+1} sur I et achève donc le raisonnement par récurrence.

b) Ce qui précède montre que F est de classe C^∞ sur I, et qu'on a $F(0) = F'(0) = 0$, puis :

$$\forall\, x \in I, \quad F^{(k)}(0) = (-1)^k\,(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k} = (-1)^k\,(k-1)!\,\zeta(k).$$

c) Compte tenu des résultats obtenus, on constate que :
• $F(x)$ décroît de $+\infty$ à 0 quand x croît de -1 à 0, avec $F(x) \sim -\ln(1+x)$ en -1.
• $F(x)$ croît de 0 à $+\infty$ quand x croît de 0 à $+\infty$, avec $F(x) \sim x\ln(x)$ en $+\infty$.
• F est convexe car F'' est positive.
Tout ceci explique le tracé de la courbe représentative de F figurant ci-dessous.



8°) *Convergence de la série de Taylor de F*
a) D'après ce qui précède, la série de Taylor de la fonction F est la série entière suivante :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\right)x^k = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k.$$

D'après la question préliminaire, on sait que : $\forall\, k \geq 2,\ 1 \leq \zeta(k) \leq 2$.
Il en résulte qu'on a pour $k \geq 2$ et x réel : $\frac{1}{k}\,|x|^k \leq \left|\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k\right| \leq \frac{2}{k}\,|x|^k$.

- Si $|x| < 1$, la série $\sum |x|^k$ converge et comme $\frac{2}{k}\,|x|^k \leq 2\,|x|^k$, la série $\sum \frac{2}{k}\,|x|^k$ converge.
Donc $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k$ est absolument convergente pour $|x| < 1$ et on a $R \geq 1$.

- Si $|x| > 1$, on voit que $\left|\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k\right| \geq \frac{|x|^k}{k} = \frac{e^{k\ln(|x|)}}{k}$ tend vers $+\infty$ et on a $R \leq 1$.
Le rayon de convergence de la série de Taylor de F est donc égal à 1.

b) Par intégration du développement en série entière $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,x^k$ $(R = 1)$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k, \qquad \text{donc : } x - \ln(1+x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,x^k.$$

c) Pour $|x| < 1$, on a donc *sous réserve de justifier la permutation des symboles* $\sum$ *:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k.$$

D'après le théorème de Fubini, cette permutation est justifiée pour $|x| < 1$ car on a :
- $\forall\, n \geq 2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left|\frac{x}{n}\right|^k = \zeta(k)\,\frac{|x|^k}{k}$ converge.
- la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \zeta(k)\,\frac{|x|^k}{k}$ converge puisqu'on a $0 \leq \zeta(k)\,\frac{|x|^k}{k} \leq 2\,|x|^k$ et $\sum |x|^k$ converge.

Ainsi donc, la série de Taylor de F converge et a pour somme F sur $]-1,\ 1[$.