



Samedi 13 Avril 2019

OPTION : PHYSIQUE

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Données numériques relatives au problème

G	$= 6.67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$	Constante universelle de gravitation
m_T	$= 5,97.10^{24} \text{ kg}$	Masse de la Terre
m_L	$= 7,34.10^{22} \text{ kg}$	Masse de la Lune
T_L	$= 27,3 \text{ j} = 2,36.10^6 \text{ s}$	Période de révolution de la Lune autour de la Terre
r_P	$= 3,57.10^8 \text{ m}$	distance entre la Terre et la Lune au périgée.
r_A	$= 4,07.10^8 \text{ m}$	distance entre la Terre et la Lune à l'apogée.
a	$= \frac{r_P+r_A}{2} = 3,82.10^8 \text{ m}$	demi grand-axe de l'orbite de la Lune.
R_L	$= 1,74.10^6 \text{ m}$	rayon moyen de la Lune.

Formulaire :

En coordonnée polaires, une trajectoire elliptique est donnée par l'équation :

$$r = \frac{p}{1+e \cos(\theta-\theta_0)}$$

avec p une constante appelée paramètre de l'ellipse, e l'excentricité de l'ellipse ($0 \leq e < 1$), r le rayon polaire et θ l'angle polaire. θ_0 est une constante.

On admettra que l'aire de l'ellipse est donnée par $\mathcal{A} = \pi\sqrt{a^3p}$ avec a le demi-grand axe de l'ellipse.

Moment d'inertie d'une boule homogène masse m et de rayon R autour d'un axe passant par son centre : $J = \frac{2}{5}mR^2$

Remarques :

- Dans cet énoncé, les dérivées temporelles seront notées avec des points : par exemple : $\frac{dx}{dt}$ sera noté \dot{x} .
- On notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ les vecteurs de la base cartésienne, et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ceux de la base cylindrique.

Introduction

Le 3 janvier 2019, pour la toute première fois, une sonde, Chang'e-4, a atterri avec succès sur la face cachée de la Lune, dans le cratère Von Kármán.

Cette épreuve est divisée en deux parties pouvant être traitées indépendamment. La première partie est consacrée au mouvement du centre de masse de la Lune autour de la Terre. La seconde propose un modèle permettant d'expliquer la raison pour laquelle la Lune possède une face cachée.

I Mouvement du centre de masse de la lune

Dans cette partie, on assimile la Lune à un point matériel L de masse m_L , et la Terre à un point matériel T de masse m_T .

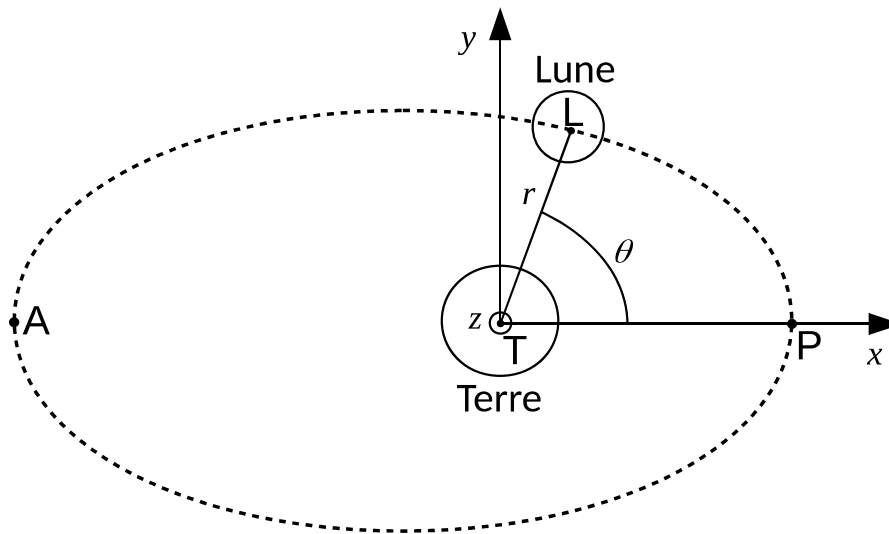


Figure 1: Schématisation de la trajectoire de la Lune autour de la Terre

I.1 Définir le référentiel de Copernic (appelé aussi référentiel héliocentrique), le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre. A quelle(s) condition(s) peut-on considérer ces référentiels comme galiléens ?

I.1 Aspects dynamiques

I.2 Donner l'expression de la force de gravitation \vec{F}_g qu'exerce la Terre sur la Lune.

Dans la suite, on se placera dans le référentiel géocentrique, qu'on supposera galiléen. On considérera que \vec{F}_g est la seule force à agir sur la Lune.

I.3 Démontrer que le mouvement de la Lune est contenu dans un plan.

Par la suite, on se placera dans le plan de la trajectoire, et on utilisera les coordonnées polaires (r, θ) telles que schématisées figure 1.

I.4 On appelle C la constante des aires telle que $C = r^2\dot{\theta}$. Montrer que C est une constante du mouvement.

I.5 Qu'appelle-t-on loi des aires (ou deuxième loi de Kepler)? En justifiant le lien entre la vitesse aréolaire et C , démontrer cette loi.

On définit le *vecteur excentricité* \vec{e} par la relation :

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{\mathcal{L}}_T}{Gm_T m_L} - \vec{e}_r$$

Avec \vec{v} le vecteur vitesse de la lune et $\vec{\mathcal{L}}_T$ le moment cinétique de la Lune par rapport au centre de la Terre T.

I.6 Exprimer les vecteurs \vec{v} et $\vec{\mathcal{L}}_T$ en fonction de $r, \dot{r}, C, m_L, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$

I.7 Démontrer que le vecteur excentricité \vec{e} est une constante du mouvement

Quitte à redéfinir l'orientation des axes des coordonnées cartésiennes, on peut supposer qu'il est possible d'écrire $\vec{e} = ||\vec{e}|| \vec{e}_x$

I.8 En effectuant le produit scalaire de \vec{e} et de \vec{TL} , montrer que la trajectoire est elliptique. Justifier l'appellation "vecteur excentricité" de \vec{e} . Montrer que le paramètre de l'ellipse p est tel que $p = C^2/(Gm_T)$.

On note A l'apogée de la Lune et P le périgée.

I.9 Définir les termes d'apogée et de périgée.

I.10 Donner les valeurs de l'excentricité e et du paramètre p de l'orbite de la Lune en fonction uniquement de r_P et r_A . Faire les applications numériques correspondantes. En déduire la valeur numérique de la constante des aires C .

I.11 En utilisant la loi des aires et l'expression de l'aire de l'ellipse donnée en début d'énoncé, montrer que la quantité $\frac{a^3}{T_L^2}$ est égale à $\frac{Gm_T}{4\pi^2}$ (ce résultat est indépendant du satellite de la Terre, et constitue la troisième loi de Kepler).

I.12 Montrer alors que la valeur de la période de révolution de la Lune donnée dans l'énoncé est cohérente avec les autres grandeurs du problème.

I.2 Aspects Énergétiques

I.13 Exprimer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de pesanteur de la Lune en fonction de r et des données du problème (on choisira de prendre $E_p = 0$ quand r tend vers $+\infty$).

I.14 Exprimer l'énergie cinétique $E_c(r)$ de la Lune en fonction de r, \dot{r} et $\dot{\theta}$, puis en fonction de r, \dot{r}, C et des paramètres du problème.

I.15 Exprimer l'énergie mécanique E_m de la Lune et montrer qu'elle se conserve.

I.16 En exprimant l'énergie mécanique à l'apogée et au périgée, montrer que l'énergie mécanique peut s'exprimer uniquement en fonction de G, m_L, m_T , et a le demi-grand axe de l'orbite de la Lune. Donner alors sa valeur numérique.

II Rotation propre de la Lune

Le fait que la Lune présente toujours la même face à la Terre est dû au fait que sa période de rotation propre autour d'elle-même est identique à sa période de rotation autour de la Terre. Un tel phénomène ne peut pas être une simple coïncidence mathématique : même un tout petit écart entre ces deux périodes de rotation aurait comme conséquence que l'ensemble de la surface de la Lune finirait par être visible depuis la Terre.

On se propose ici d'expliquer ce phénomène. Pour simplifier l'étude, on considérera maintenant que le mouvement du centre de la Lune autour de la Terre est circulaire, de rayon a , de période de révolution autour de la Terre T_L , et de période de rotation propre autour d'elle même T_p , avec, *a priori*, $T_p \neq T_L$.

On note $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$ et $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ respectivement les vitesses angulaire de révolution de la Lune autour de la Terre et de rotation propre.

On commence par supposer que la forme de la Lune reste sphérique tel que représenté figure 2.

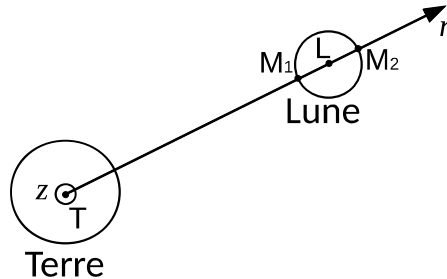


Figure 2: Système Terre-Lune considérant une lune sphérique.

II.1 Donner l'expression de $\Delta \vec{g} = \vec{g}(M_1) - \vec{g}(M_2)$, où \vec{g} est le champ de pesanteur créé par la Terre, M_1 le point de la surface de la Lune le plus proche de la Terre, et M_2 le point le plus éloigné. Faire un développement limité de $\Delta \vec{g}$ à l'ordre 1 en R_L/a . Calculer numériquement $\|\Delta \vec{g}\|$

Bien que de composition rocheuse, la Lune peut se déformer légèrement sous l'effet des différences de champ de pesanteur entre différents points de la Lune.

II.2 Justifier alors qualitativement que la Lune adopte une forme ellipsoïdale.

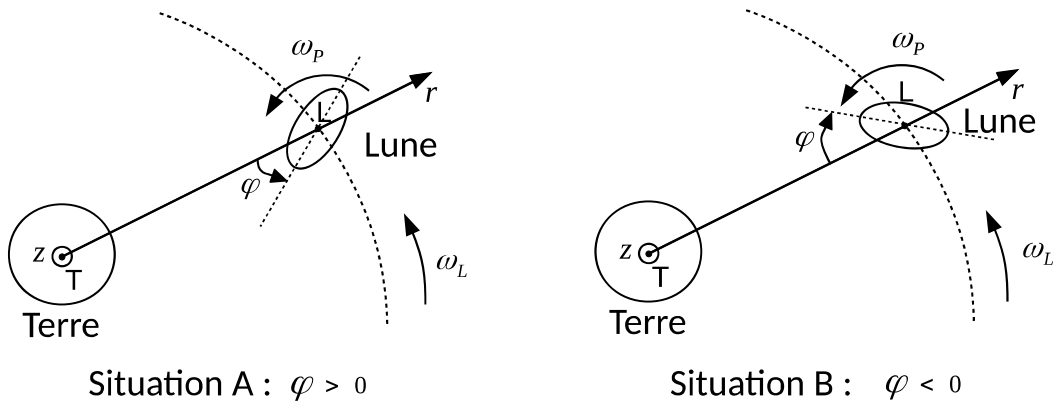


Figure 3: Trajectoire de la Lune. Les flèches correspondant à ω_p et ω_L indiquent respectivement les sens de rotation de la Lune autour d'elle même et de révolution autour de la Terre.

En raison de l'inertie, la déformation ne s'effectue pas instantanément mais avec un certain retard. On note alors φ l'angle entre le vecteur \overrightarrow{TL} et l'axe de l'ellipsoïde de la Lune tel que schématisé figure 3. On admet par ailleurs que $0 \leq |\varphi| \leq \pi/2$.

Remarque : il est à noter que φ dépend de ω_p , d'une manière qu'on ne cherchera pas à expliciter dans ce problème..

II.3 Attribuer à chacune des situations A et B de la figure 3 les situations " $\omega_L > \omega_p$ " et " $\omega_L < \omega_p$ ", en expliquant votre raisonnement.

Afin de simplifier l'étude, on suppose que la situation étudiée est équivalente à celle ci : la Lune est une masse sphérique, de centre L et de masse $m_L - 2\Delta m$, à laquelle on rajoute deux masse Δm en deux points diamétralement opposés L_1 et L_2 tel que schématisé figure 4.

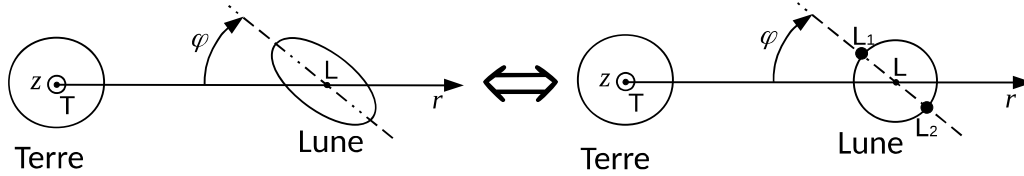


Figure 4: Modélisation de la déformation de la Lune.

II.4 En considérant que le moment d'inertie de la Lune reste le même qu'une boule homogène de rayon R_L , exprimer le moment cinétique \mathcal{L}_p la Lune par rapport à l'axe (Lz) .

II.5 On appelle \mathcal{M} le moment total par rapport à l'axe (Lz) des forces de pesanteur exercée par la Terre sur les points L, L_1 et L_2 . En effectuant des approximations légitimes, montrer que $\mathcal{M} = -\frac{2GR_L m_T \Delta m}{a^2} \sin \varphi$

II.6 En appliquant le théorème du moment cinétique à la Lune par rapport à l'axe (Lz) , donner l'équation différentielle décrivant l'évolution de la vitesse angulaire de rotation propre ω_p de la Lune.

II.7 Justifier alors que ω_p tend vers ω_L quand t tend vers $+\infty$

II.8 La durée du jour terrestre est actuellement de 24 heures. A l'époque Jurassique (il y a environ 100 millions d'année), la durée du jour était d'environ 23 heures et était encore plus courte à des temps plus anciens. Expliquer.

FIN DE L'ENONCE