

# Epreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

## La boîte de vitesse à variation continue CVT

**Durée : 2h. Calculatrices autorisées. Documents interdits.**

Ce sujet comporte 10 pages.

### Présentation

La boîte de vitesse d'une automobile est un organe d'adaptation de puissance disponible et fournie par le moteur thermique à la puissance nécessaire au déplacement du véhicule. Les boîtes automatiques sont de plus en plus utilisées de par leur confort d'utilisation et leur progrès en termes de consommation de carburant. La boîte de vitesse CVT dite « à variation continue » est un exemple de boîte automatique moderne.

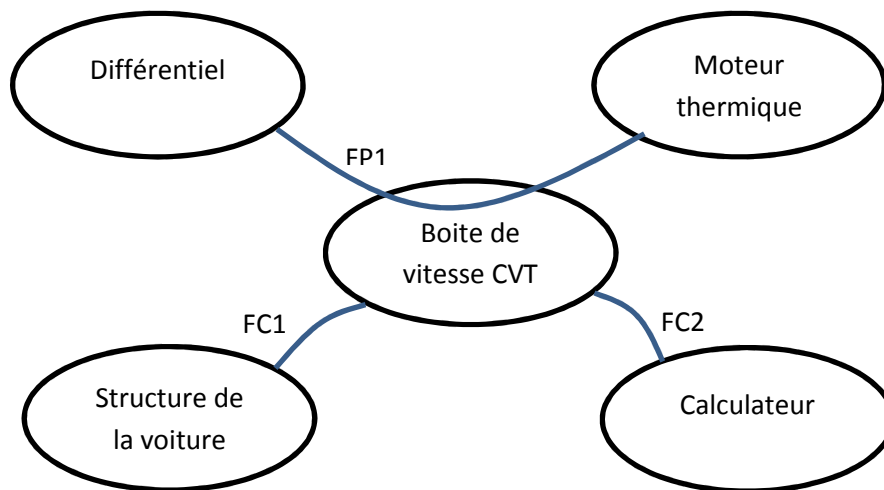


Figure 1 : Diagramme des interacteurs du système.

Fonction	Enoncé	Critère	Niveau
FP1	Adapter la puissance du moteur au différentiel	Puissance transmise	200 kW minimum
		Rapports de réduction entre la vitesse du moteur et du différentiel	Cf texte du sujet.
FC1	Etre en liaison encastrement	Efforts dans la liaison	
FC2	Recevoir des ordres du calculateur		

La boîte de vitesse Audi Multitronic (Figure 11 page 10 et Figure 2 page 2) est un exemple de boîte à variation continue. Elle est constituée d'un embrayage multidisques, d'un réducteur à engrenages, d'un système poulie-chaîne à variation de rayon, et d'un engrenage conique.

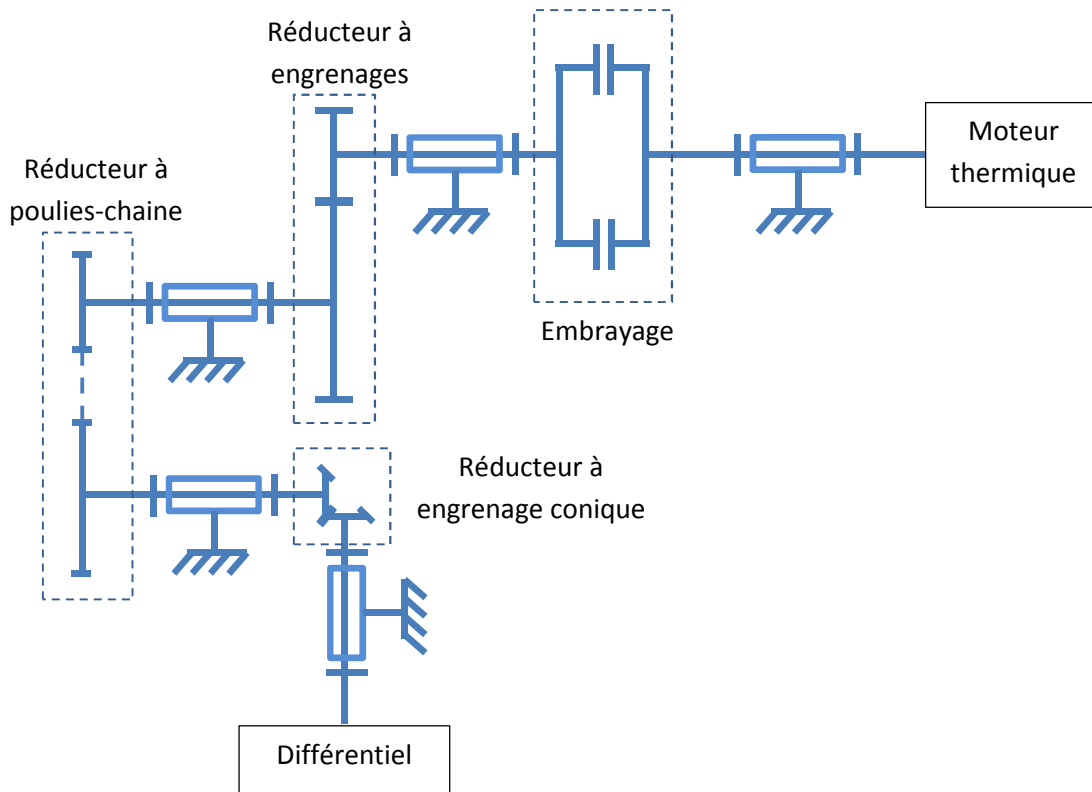


Figure 2 : Schéma cinématique de la boîte CVT.

Le système poulie-chaîne comporte deux poulies et une chaîne (Figure 3 page 2) similaire à une courroie de section trapézoïdale. Chacune des poulies est composée de deux flasques coniques, dont un est mobile le long de son axe (Figure 4 page 3). Cette mobilité induit une variation de rayon des poulies. Le déplacement des flasques mobiles est assuré par des vérins hydrauliques.

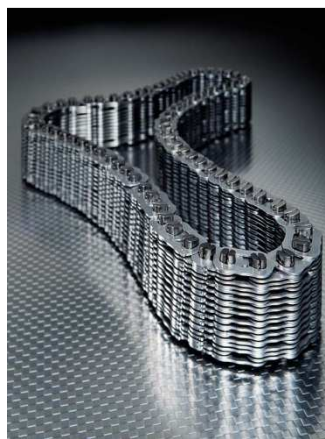


Figure 3 : Chaîne utilisée dans la boîte Multitronic.

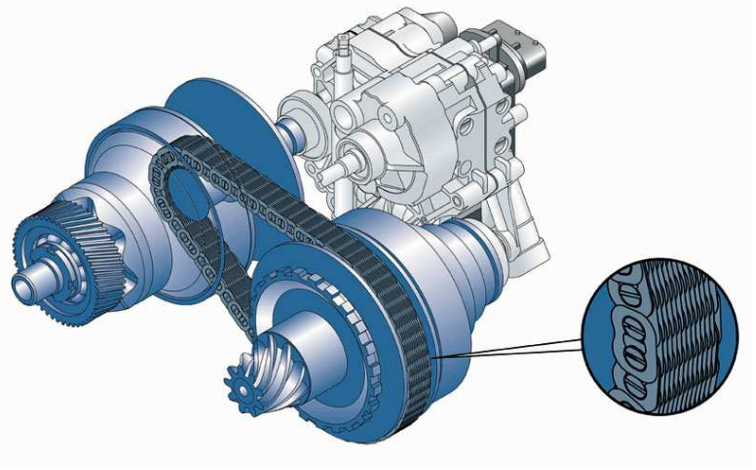


Figure 4 : Système poulie chaîne.

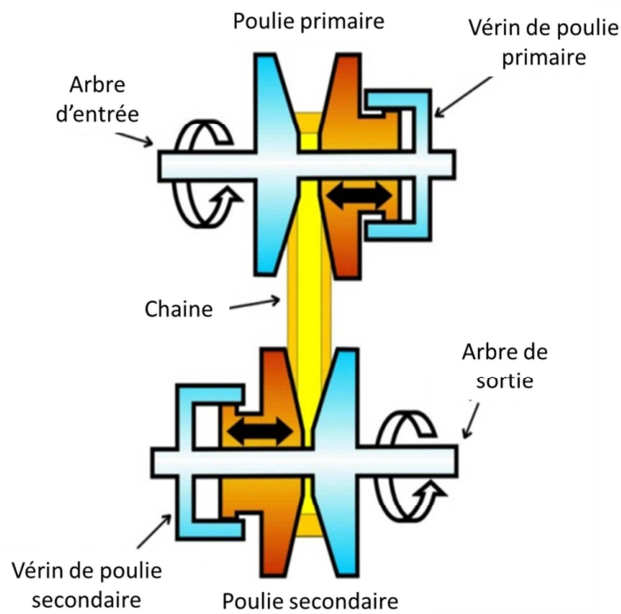


Figure 5 : Principe de fonctionnement du système poulie chaîne à variation continue.

## Première partie : Détermination de la course du vérin hydraulique

Dans cette partie, on cherche à déterminer la course des vérins actionnant les flasques mobiles du système poulie-chaîne pour pouvoir respecter le critère de rapport de réduction de la fonction FP1.

On modélise le réducteur à poulie chaîne comme sur la Figure 6 page 4.

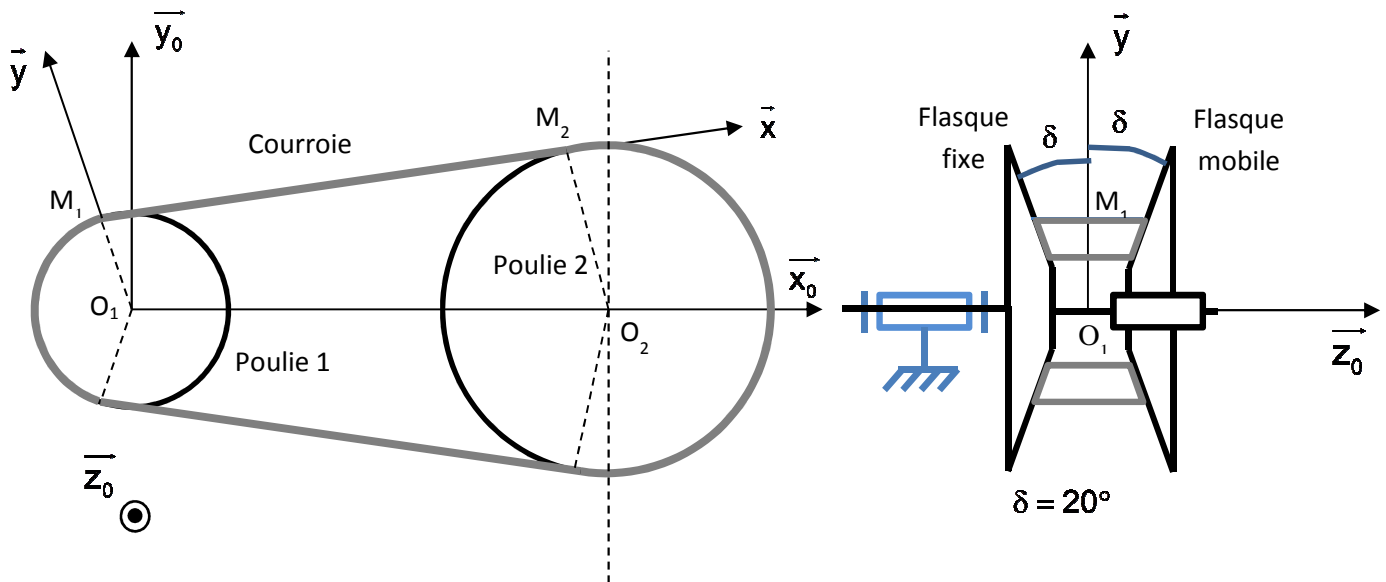


Figure 6 : Modélisation du système poulie chaîne.

La chaîne est supposée sans épaisseur et inextensible. Elle ne glisse pas sur les poulies. La poulie 1 tourne à une vitesse notée  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_1 \vec{z}_0$  par rapport au bâti et la poulie 2 tourne à une vitesse notée  $\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_2 \vec{z}_0$  par rapport au bâti de la voiture noté 0. Les rayons des poulies 1 et 2 sont notés  $R_1$  et  $R_2$ .

1. Déterminer le vecteur vitesse du point  $M_1$  appartenant à la poulie 1 par rapport au bâti 0  $\vec{V}_{M_1,1/0}$  en fonction de  $\omega_1$  et des constantes du problème.

$$\vec{V}_{M_1,1/0} = -R_1 \omega_1 \vec{x}$$

2. Déterminer le vecteur vitesse du point  $M_2$  appartenant à la poulie 1 par rapport au bâti 0  $\vec{V}_{M_2,2/0}$  en fonction de  $\omega_2$  et des constantes du problème.

$$\vec{V}_{M_2,2/0} = -R_2 \omega_2 \vec{x}$$

3. En utilisant le caractère inextensible de la chaîne, déterminer une relation entre  $\vec{V}_{M_1,1/0}$  et  $\vec{V}_{M_2,2/0}$ .

$$\vec{V}_{M_1,1/0} = \vec{V}_{M_2,2/0}$$

4. En déduire l'expression du rapport  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  en fonction des constantes du problème.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

5. Expliquer pourquoi ce système est appelé système « à variation continue ».

La variation continue réside dans le fait que le déplacement des poulies mobiles suivant leur axe est continu, donc une variation continue de  $R_1$  et de  $R_2$ , donc de  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$ .

Le rapport de réduction doit être tel que :  $0,4 < \frac{\omega_2}{\omega_1} < 2,5$ . La valeur maximale que peut prendre  $R_1$  ou  $R_2$  est de 80 mm.

6. Déterminer la valeur minimale que doit prendre  $R_1$  ou  $R_2$ .

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} = 0,4 \text{ si } R_2 = 80 \text{ mm. On en déduit que la valeur minimale de } R_1 \text{ ou } R_2 \text{ est de } 32 \text{ mm.}$$

7. En déduire l'expression de la course  $\Delta Z$  du vérin hydraulique actionnant le flasque mobile de chacune des poulies. Faire l'application numérique.

$$\sin \delta = \frac{\Delta z}{R_{\max} - R_{\min}}. \text{ On en déduit } \Delta z = (R_{\max} - R_{\min}) \sin \delta = (80 - 32) \sin 20^\circ = 16 \text{ mm.}$$

## Deuxième partie : Détermination de la pression dans le vérin en fonction du couple à transmettre

On s'intéresse maintenant à la pression dans les vérins hydraulique manœuvrant les flasques mobiles des poulies. Pour cela, on ne considère qu'une poulie (1 ou 2) et on va déterminer les tensions dans les brins mou  $T_m$  et tendu  $T_t$  de la chaîne en fonction du couple à transmettre.

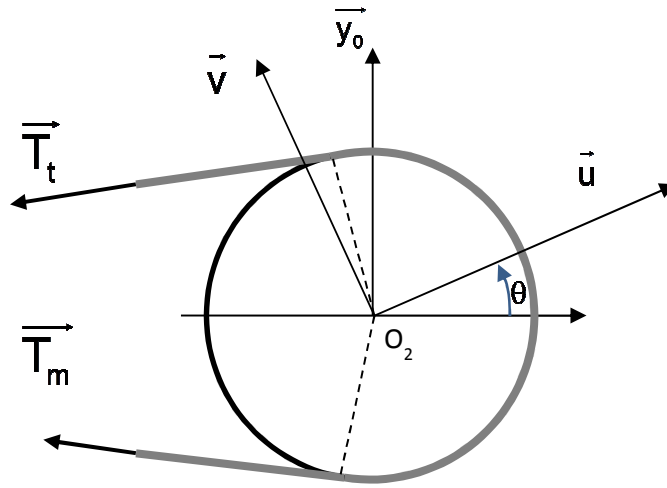


Figure 7 : Modélisation des efforts s'appliquant sur une poulie.

On modélise la chaîne comme un solide unidimensionnel de masse linéique  $\rho$ . On suppose que les poulies tournent à vitesse constante  $\overrightarrow{\Omega_{p/0}} = \omega \overrightarrow{z_0}$ . On appelle  $T(\theta)$  la tension dans la chaîne évoluant de la valeur  $T_m$  à la valeur  $T_t$  en fonction de  $\theta$ . Le coefficient de frottement entre la chaîne et chacun des flasques est noté  $f$ .

On va isoler un morceau de chaîne élémentaire de secteur angulaire  $d\theta$  (Figure 8 page 6). Cet élément de chaîne est soumis à :

- l'action du brin de chaîne « de droite »  $\overrightarrow{T}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)$  de norme  $T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)$  ;
- l'action du brin de chaîne « de gauche »  $\overrightarrow{T}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$  de norme  $T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$  ;
- l'action du flasque mobile suivant la normale  $\overrightarrow{dN_m}$  et suivant la tangente  $-d\overrightarrow{T_m} \overrightarrow{v}$  ;
- l'action du flasque mobile suivant la normale  $\overrightarrow{dN_f}$  et suivant la tangente  $-d\overrightarrow{T_f} \overrightarrow{v}$ .

On supposera que  $\|\overrightarrow{dN_m}\| = \|\overrightarrow{dN_f}\| = dN$  grâce à la symétrie du problème.

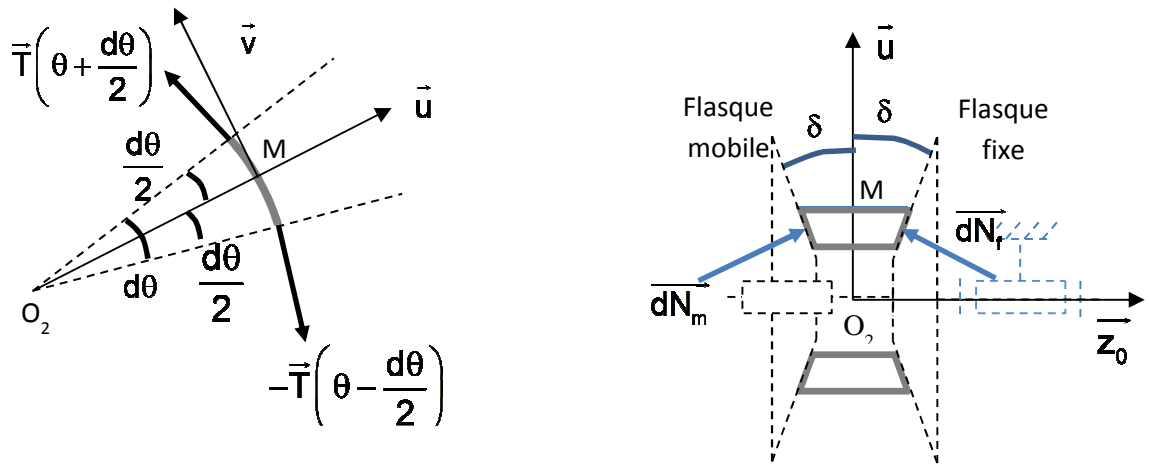


Figure 8 : Isolement d'un morceau de chaîne.

8. Déterminer la masse de l'élément de chaîne en fonction de  $\rho$ ,  $R$  et de l'angle élémentaire  $d\theta$ .

$$dm = \rho R d\theta$$

9. Déterminer le vecteur accélération du point M de l'élément de chaîne isolé par rapport au bâti  $\overrightarrow{a_{M,chaîne/0}}$ .

$$\overrightarrow{a_{M,chaîne/0}} = -R\omega^2 \vec{u}$$

10. Décomposer les vecteurs  $\overrightarrow{dN_m}$  et  $\overrightarrow{dN_f}$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{z_0})$ .

$$\overrightarrow{dN_m} = dN(\cos\delta \vec{z_0} + \sin\delta \vec{u}) \text{ et } \overrightarrow{dN_f} = dN(-\cos\delta \vec{z_0} + \sin\delta \vec{u})$$

On cherche la valeur limite de la pression dans le vérin hydraulique actionnant le flasque mobile, on se place donc à la limite du glissement.

11. Exprimer  $dT_m$  et  $dT_f$  en fonction de  $f$  et  $dN$ .

$$dT_m = dT_f = f.dN$$

12. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à l'élément de chaîne et projeter l'équation vectorielle sur les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$\overrightarrow{a_{M,chaîne/0}}.dm = -T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - dT_m \vec{v} - dT_f \vec{v} + \overrightarrow{dN_m} + \overrightarrow{dN_f}$$

$$\text{En projection sur } \vec{u} : -\rho.R^2.\omega^2 d\theta = -\left[T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\right] \sin\frac{d\theta}{2} + 2dN.\sin\delta$$

$$\text{En projection sur } \vec{v} : 0 = \left[-T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\right] \cos\frac{d\theta}{2} - 2f.dN$$

13. Réécrire les équations précédentes en appliquant l'approximation des angles petits à l'angle infiniment petit.

$$\text{On utilisera les développements limités : } T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = T(\theta) + \frac{dT}{2} \text{ et } T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) = T(\theta) - \frac{dT}{2}$$

$$\text{On utilise les propriétés suivantes : } \sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \text{ et } \cos\frac{d\theta}{2} = 1. \text{ On obtient :}$$

$$-\rho.R^2.\omega^2 d\theta = -\left[2T(\theta)\right] \frac{d\theta}{2} + 2dN.\sin\delta$$

$$\text{Et } 0 = dT - 2f.dN$$

14. En déduire que  $T_t = (T_m - \rho.R^2.\omega^2).e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} + \rho.R^2.\omega^2$  et que  $T(\theta) = (T_m - \rho.R^2.\omega^2).e^{\frac{f}{\sin\delta}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)} + \rho.R^2.\omega^2$ .

$$(T - \rho.R^2.\omega^2) d\theta = 2dN.\sin\delta \text{ et } dT = 2f.dN$$

$$\text{En éliminant } dN, \text{ on obtient } \frac{dT}{(T - \rho.R^2.\omega^2) d\theta} = \frac{2f.dN}{2dN.\sin\delta}$$

$$\text{On en déduit } \frac{dT}{(T - \rho.R^2.\omega^2)} = \frac{f}{\sin\delta} d\theta ; \int_{T_m}^{T_t} \frac{dT}{(T - \rho.R^2.\omega^2)} = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{f}{\sin\delta} d\theta$$

$$\text{Finalement } T_t = (T_m - \rho.R^2.\omega^2).e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} + \rho.R^2.\omega^2$$

$$\text{D'autre part, } \int_{T_m}^T \frac{dT}{(T - \rho.R^2.\omega^2)} = \int_{-\alpha/2}^{\theta} \frac{f}{\sin\delta} d\theta \text{ et donc } T = (T_m - \rho.R^2.\omega^2).e^{\frac{f}{\sin\delta}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)} + \rho.R^2.\omega^2$$

15. Déterminer l'expression de  $T_m$  en fonction du couple à transmettre  $C$ .

$$C = (T_t - T_m)R = \left[ (T_m - \rho.R^2.\omega^2).e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} + \rho.R^2.\omega^2 - T_m \right] R = \left( e^{\frac{f\alpha}{\sin\delta}} - 1 \right) (T_m - \rho.R^2.\omega^2) R$$

16. Reprendre les équations précédentes et déterminer l'expression de l'effort normal élémentaire  $dN$ .

$$0 = dT - 2f.dN \text{ donc } dN = \frac{dT}{2f} = (T_m - \rho.R^2.\omega^2) \frac{e^{\frac{f}{\sin\delta}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}}{2.\sin\delta} . d\theta.$$

17. En déduire l'effort axial  $F_a$  que doit appliquer le vérin sur le flasque mobile pour éviter tout glissement de la chaîne en fonction du couple  $C$  à transmettre.

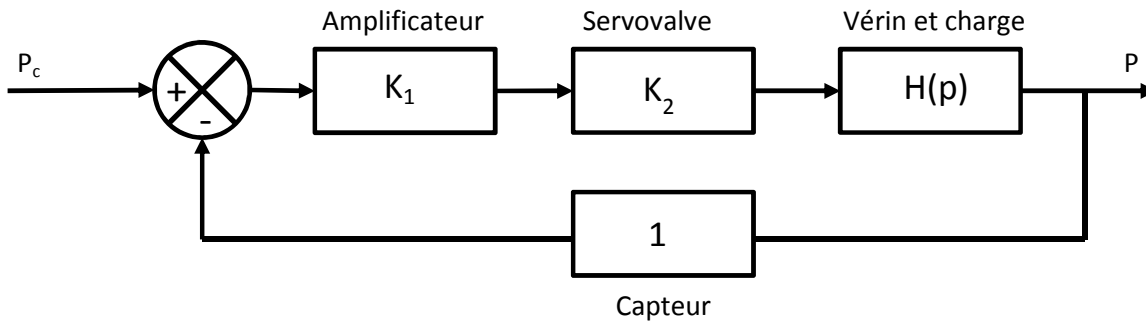
$$F_a = \int dN \cos\delta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (T_m - \rho.R^2.\omega^2) \frac{e^{\frac{f}{\sin\delta}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}}{2.\sin\delta} \cos\delta . d\theta = \frac{T_m - \rho.R^2.\omega^2}{2 \tan\delta} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} e^{\frac{f}{\sin\delta}\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)} . d\theta$$

$$F_a = \frac{T_m - \rho.R^2.\omega^2}{2 \tan\delta} \frac{\sin\delta}{f} \left[ 1 - e^{-\frac{f.\alpha}{\sin\delta}} \right]$$

$$\text{Donc } F_a = \frac{C}{2R.f.\cos\delta} \left[ \frac{1 - e^{-\frac{f.\alpha}{\sin\delta}}}{e^{\frac{f.\alpha}{\sin\delta}} - 1} \right].$$

### Troisième partie : Etude de l'asservissement en pression

Nous venons de voir dans la partie précédente que pour transmettre un couple en évitant tout glissement de la chaîne, il est nécessaire que les vérins hydrauliques actionnant les flasques mobiles exercent une force déterminée. Il est donc nécessaire d'asservir les vérins hydrauliques en pression. L'asservissement possède le schéma-bloc suivant :



$P_c$  est la pression de consigne,  $P$  est la pression effective asservie. La fonction de transfert de l'ensemble vérin et charge est  $H(p) = \frac{K}{p} \frac{a.p^2 + b.p + c}{a.p^2 + b.p + c + 1}$ .

18. Déterminer l'erreur statique lorsque la consigne est un échelon de pression  $P_{c0}$ .

**Le système comporte une FTBO de classe 1, l'erreur statique est nulle pour une entrée échelon.**

On donne le diagramme de Bode de la fonction  $K_2.H(p) = K_2 \cdot \frac{K}{p} \frac{a.p^2 + b.p + c}{a.p^2 + b.p + c + 1}$ .

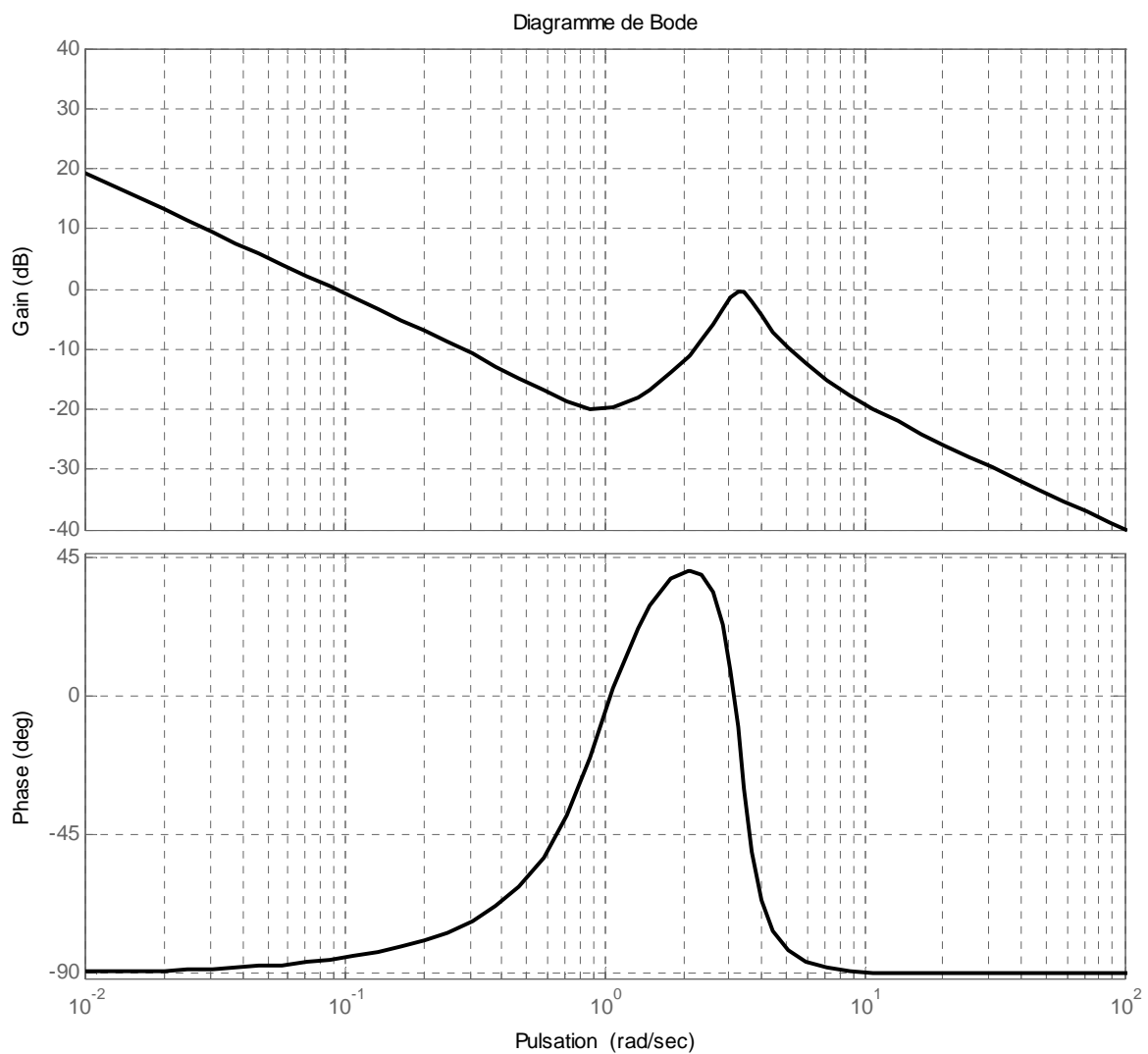


Figure 9 : Diagramme de Bode de  $K_2.H(p)$ .



19. Le système est-il stable ? Pourquoi ?

Le système est stable car la phase est toujours supérieure à  $-90^\circ$ .

20. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

$$FTBF(p) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot (a \cdot p^2 + b \cdot p + c)}{p \cdot (a \cdot p^2 + b \cdot p + c + 1) + K_1 \cdot K_2 \cdot (a \cdot p^2 + b \cdot p + c)}$$

On cherche à déterminer la valeur de  $K_1$  donnant le meilleur temps de réponse au système. La Figure 10 page 9 présente la réponse indicielle du système pour différentes valeurs du gain de l'amplificateur  $K_1$ .

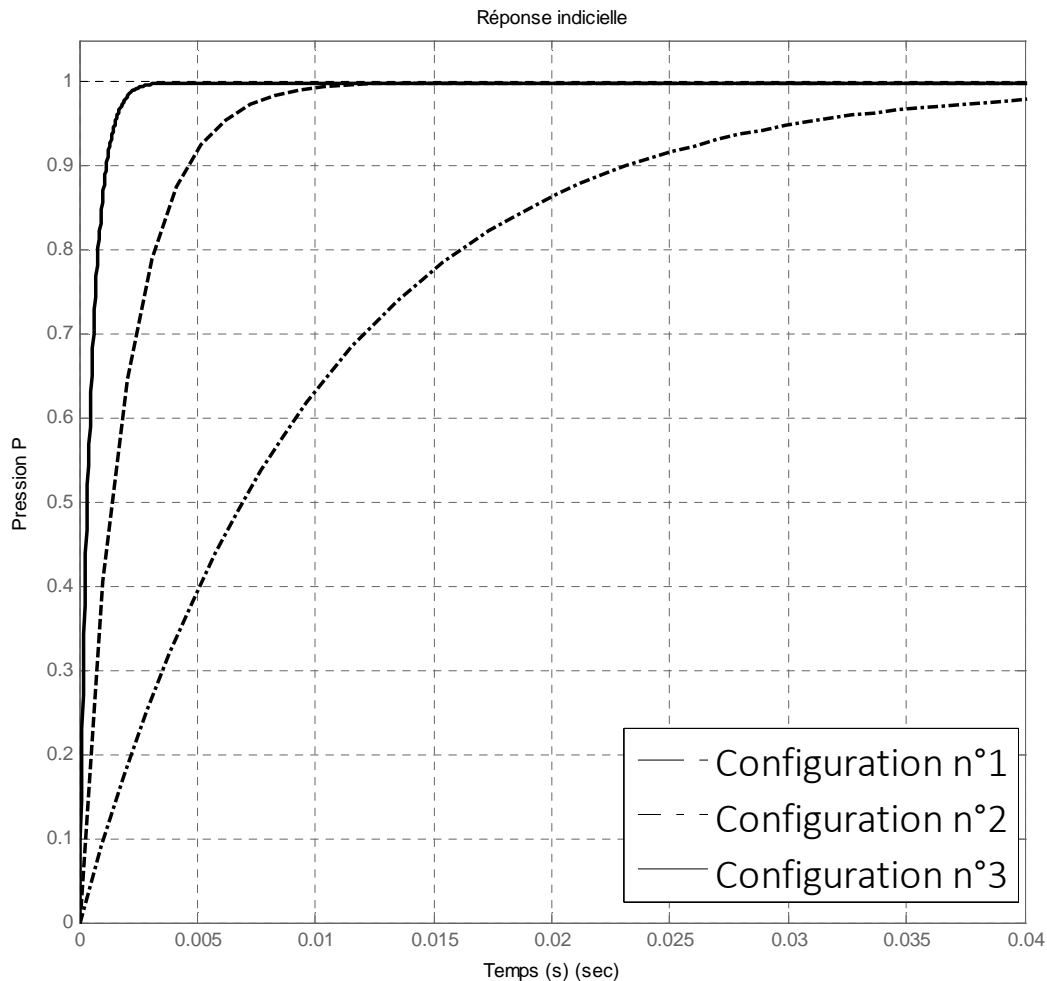


Figure 10 : Réponse indicielle pour différentes configurations.

21. Pour chacune des configurations, déterminer le temps de réponse à 5% et choisir la configuration la plus avantageuse. Commenter.

Configuration n°1 :  $Tr_{5\%} = 1,5 \text{ ms}$

Configuration n°2 :  $Tr_{5\%} = 6 \text{ ms}$

Configuration n°3 :  $Tr_{5\%} = 30,2 \text{ ms}$

La configuration la plus avantageuse est ici la configuration n°1. Le réglage de  $K_1$  est limité par la puissance disponible dans l'installation.

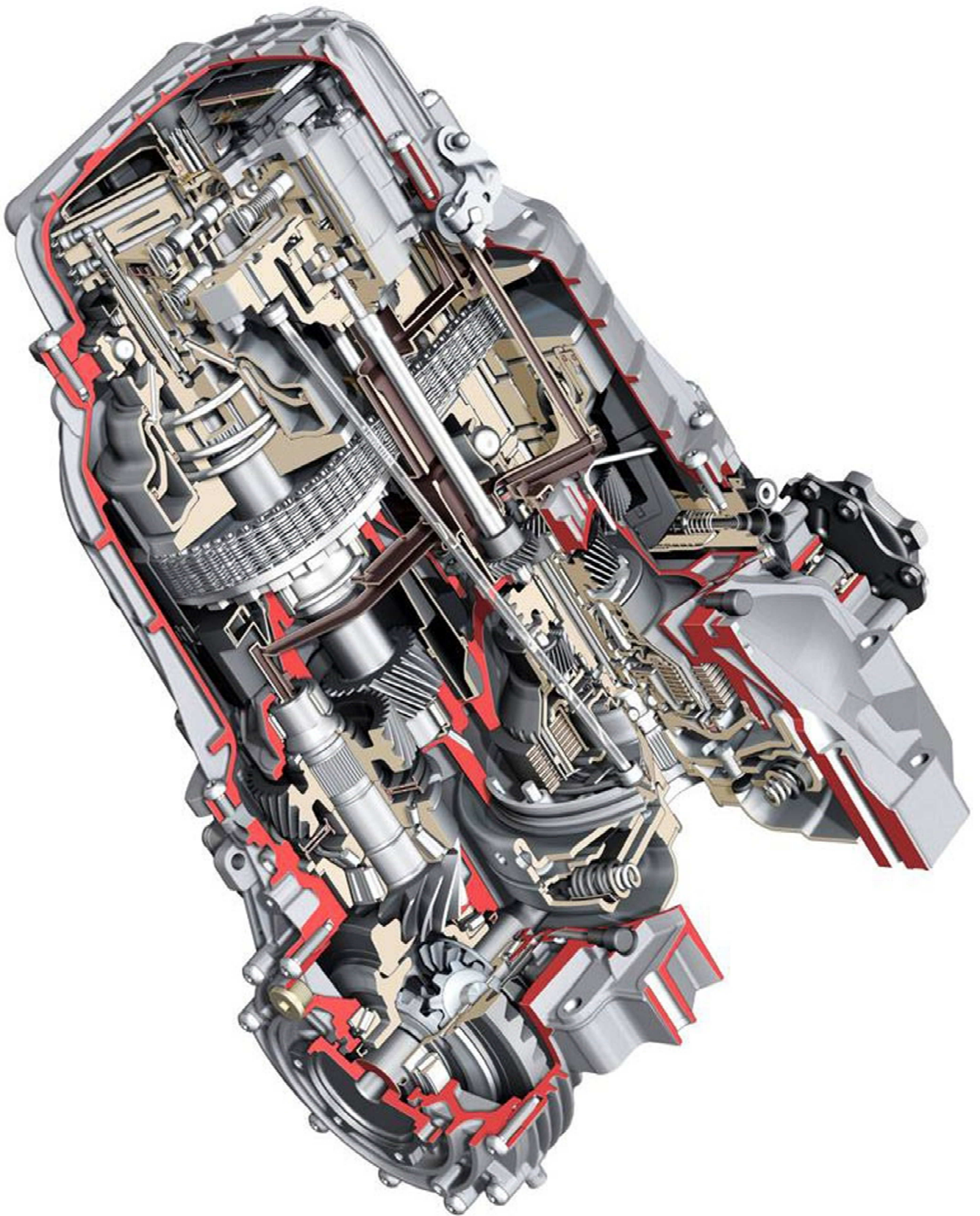


Figure 11 : Boite de vitesse à variation continue Audi Multitronic qui équipe l'Audi A6.