



Samedi 04 Avril 2020

EPREUVES: MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours EPITA-IPSA-ESME 2020

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI

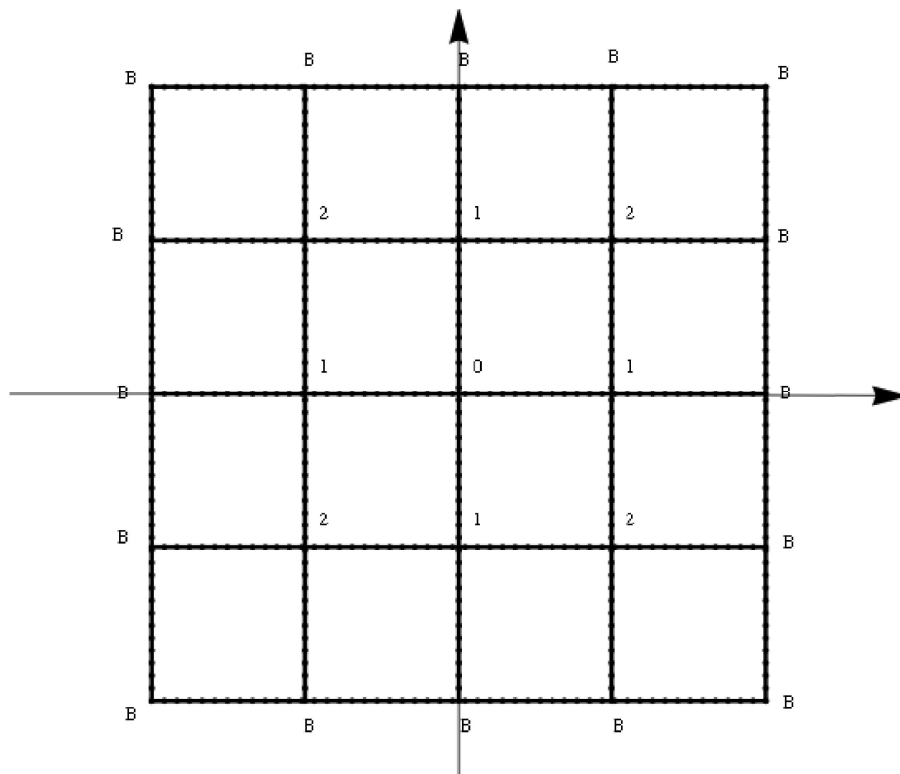
■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie I

On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$ avec :

- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i, j) avec $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C , et B les points du bord du carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i, j) où $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

- 1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).
- 2) à tout instant n , si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C , il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M , de façon à se trouver à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M .
- 3) à tout instant n , si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i, j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

1°) *Etude d'une suite de variables aléatoires (X_n)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n . Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

- Expliquer brièvement pourquoi on a : $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$.
- Expliciter de même les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.
- Exprimer chacun des 4 réels $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = B)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.
- Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

- Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 .

On demande de déterminer les quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur U_1 de \mathbb{R}^4 associé à $\lambda = 1$ dont la dernière composante est égale à 1.
- le vecteur U_2 de \mathbb{R}^4 associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_3 de \mathbb{R}^4 associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1.
- le vecteur U_4 de \mathbb{R}^4 associé à $\lambda = 0$ dont la dernière composante est égale à 1.

- On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1 , U_2 , U_3 , U_4 .

On note D la matrice diagonale $D = \text{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D , M , P , P^{-1} .

3°) *Lois des variables aléatoires X_n*

Pour tout entier naturel n , on désigne par V_n le vecteur-colonne de \mathbb{R}^4 dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

- Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n , qu'on a : $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.
- Soit X un vecteur-colonne de \mathbb{R}^4 dont on note les composantes x_1 , x_2 , x_3 , x_4 .

Déterminer X tel que $P X = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

- En déduire $P^{-1} V_0$, puis $D^n P^{-1} V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.
- Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$, et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

4°) *Temps d'attente pour atteindre le bord du carré*

On désigne par T la fonction indiquant l'instant $n \in \mathbb{N}$ où, pour la première fois, l'individu atteint le bord du carré C , c'est-à-dire où l'événement $X_n = B$ est réalisé pour la première fois.

a) Montrer, pour tout entier naturel n , que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$, puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$.

Ainsi, on peut considérer la fonction T comme une variable aléatoire discrète.

b) Pour $n \geq 1$, exprimer l'événement $(T = 2n)$ à l'aide des événements $(X_{2n} = B)$ et $(X_{2n-1} = 1)$.

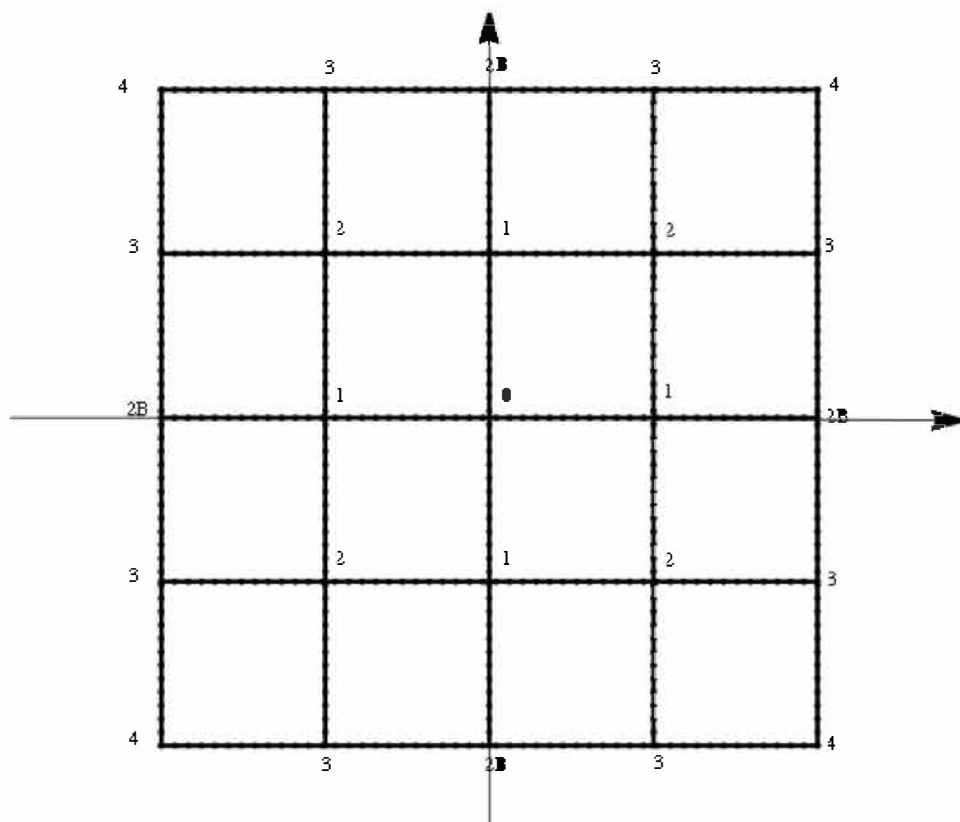
En déduire $\mathbb{P}(T = 2n)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

d) A l'aide d'un raisonnement analogue, déterminer $\mathbb{P}(T = 2n + 1)$ en fonction de n pour $n \geq 1$.

d) Déterminer alors l'espérance de la variable aléatoire T .

■ ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE : Partie II

On note maintenant les 25 points de la grille comme suit : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C , 2B les points à 2 arêtes de 0 et appartenant au bord de C , 3 les points à 3 arêtes de 0, et 4 les points à 4 arêtes de 0.



Dans cette partie II, on ne suppose plus que l'individu arrête sa marche lorsqu'il atteint le bord de C et ses déplacements sur les 25 points de la grille se font désormais suivant les 2 règles suivantes :

- 1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en $O(0, 0)$.
- 2) à tout instant n , si l'individu est en un point M de la grille, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M , de façon à être à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des points M' de la grille distants d'une arête du point M .

On prendra garde au fait que selon les points M choisis parmi les 25 points de la grille, le nombre des points M' situés à une arête de M sur cette grille peut être égal à 2, 3 ou 4.

5°) Etude d'une suite de variables aléatoires (Y_n)

Pour tout entier naturel n , on note Y_n la variable aléatoire indiquant la position de l'individu à l'instant n . Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 2B, 3, 4\}$.

a) Expliciter $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2B)$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 4)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2B)$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.