E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (2 h)

Dans ce problème, on considère un entier naturel n, qu'on suppose supérieur ou égal à 2, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées M d'ordre n à coefficients complexes $m_{i,j}$, et le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué par les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère alors une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on rappelle que la *classe de similitude de A* désigne l'ensemble $C(A)$ des matrices semblables à la matrice A, c'est à dire :

$$C(A) = \left\{P^{-1}\, A\, P \;/\; P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}.$$

■ Partie I : Généralités sur les classes de similitude

1°) *Premières propriétés de $C(A)$*

a) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifier que si $C(M) = C(A)$, alors M appartient à $C(A)$.
Démontrer inversement que si M appartient à $C(A)$, alors $C(M) = C(A)$.

b) Déterminer toutes les matrices de $C(A)$ lorsque $A = \lambda\, I_n$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

c) On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1. Etablir que si $C(A) = \{A\}$, alors A commute avec toutes les matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, en particulier avec les matrices de la forme $I_n + E_{i,j}$ pour $1 \leq i,\ j \leq n$, et donc avec les matrices $E_{i,j}$.
Qu'en déduit-on pour la matrice A?

2°) *Quelques propriétés communes aux matrices de la classe de similitude $C(A)$*

On désigne par $\mathrm{Tr}(M)$ et $\mathrm{Det}(M)$ la trace et le déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Démontrer l'égalité $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$ pour $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
En déduire, pour toute matrice $M \in C(A)$, qu'on a $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A)$.

b) A l'aide des propriétés usuelles du déterminant, démontrer, pour toute matrice $M \in C(A)$, qu'on a $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A)$, et plus généralement $\mathrm{Det}(M - z\, I_n) = \mathrm{Det}(A - z\, I_n)$ pour $z \in \mathbb{C}$.
En déduire, pour toute matrice $M \in C(A)$, que M a les mêmes valeurs propres que A avec les mêmes ordres de multiplicité.

3°) *Matrices triangulaires ou diagonales de la classe de similitude $C(A)$*

On désigne désormais par $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes ou non de A.

a) En s'appuyant sur un théorème de cours dont on précisera l'énoncé, établir qu'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ayant la forme suivante, telle que $C(A) = C(T)$:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) Etablir que A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice diagonale D, dont on précisera la forme, telle que $C(A) = C(D)$.

c) Dans cette question, on donne deux nombres complexes *distincts* a et b avec $b \neq 0$.
Etudier l'existence, et expliciter éventuellement, des matrices diagonales D_i dans $C(A_i)$ dans les trois cas suivants (où $i = 1$, 2 ou 3) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

■ Partie II : Condition pour que la classe $C(A)$ soit bornée

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme usuelle définie pour $M = (m_{i,j})$ par :

$$\|M\|_\infty = \max\left\{|m_{i,j}| \,/\, 1 \leq i,\ j \leq n\right\}.$$

On étudie le caractère borné de la classe de similitude $C(A) = C(T)$ (où T désigne la matrice triangulaire introduite dans la question 3°), ce qui revient à étudier s'il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\forall\, M \in C(A), \quad \|M\|_\infty \leq \rho.$$

4°) *Une condition pour que $C(A)$ soit bornée lorsque $n = 2$*

On suppose dans toute cette question que l'entier n est égal à 2 et on pose :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On désigne dans la suite par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, écrire la matrice de passage P_k de la base (e_1, e_2) à la base $\left(\frac{1}{k} e_1, e_2\right)$.
Expliciter la matrice inverse P_k^{-1} et le produit $P_k^{-1}\, T\, P_k$.

b) En déduire, si $C(A)$ est bornée, que le coefficient t est nécessairement nul.

c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, écrire la matrice de passage Q_k de la base (e_1, e_2) à la base $\left(e_1 + e_2, \frac{1}{k} e_2\right)$.
Expliciter la matrice inverse Q_k^{-1} et le produit $Q_k^{-1}\, T\, Q_k$ lorsque $t = 0$.

d) En déduire à quelle condition sur T la classe de similitude $C(A)$ est bornée.
Expliciter alors A.

5°) *Une condition pour que $C(A)$ soit bornée dans le cas général*

On revient au cas général, et T est la matrice triangulaire introduite dans la question 3°.
On désigne dans la suite par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

a) On considère un entier i entre 1 et n et un entier quelconque $k \in \mathbb{N}^*$.
Ecrire la matrice de passage P_k de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_k = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$ dont les vecteurs sont définis par $e_i' = \frac{1}{k} e_i$ et $e_p' = e_p$ pour $p \neq i$.
Expliciter la matrice inverse P_k^{-1} et le produit $P_k^{-1}\, T\, P_k$.

b) En déduire, si $C(A)$ est bornée, que la matrice T est nécessairement diagonale.

c) On considère deux entiers distincts i et j entre 1 et n et un entier quelconque $k \in \mathbb{N}^*$.
Ecrire la matrice de passage Q_k de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_k = (e_1', e_2', \ldots, e_n')$ dont les vecteurs sont définis par $e_i' = e_i + e_j$, $e_j' = \frac{1}{k} e_j$ et $e_p' = e_p$ pour $p \neq i$, $p \neq j$.
Expliciter la matrice inverse Q_k^{-1} et le produit $Q_k^{-1}\, T\, Q_k$ lorsque T est diagonale.

d) En déduire à quelle condition sur T la classe de similitude $C(A)$ est bornée.
En déduire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

e) Préciser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est compacte.