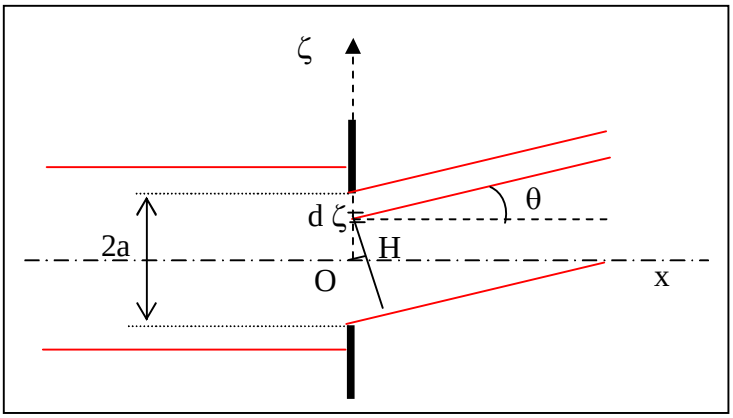
Corrigé



1)- L'onde réémise par $d\xi$ dans la direction θ a une amplitude proportionnelle à l'amplitude s_0 de l'onde incidente et à la largeur de l'élément $d\xi$: si on désigne par $\frac{s_0}{2a}$ l'amplitude émise par unité de largeur, l'amplitude émise par $d\xi$ à l'abscisse ξ s'écrit:

$$\frac{s_0}{2a} d\xi$$

En prenant pour origine des phases celle de l'onde émise par l'élément placé en O, la phase de l'onde émise par $d\xi$ s'écrit:

$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \delta$, ou δ est la différence de marche entre l'onde émise en O et celle émise à l'abscisse ξ :

$$\delta = OH = \xi \cdot \sin\theta$$

L'amplitude complexe émise par l'élément $d\xi$ s'écrit donc:

$$ds = \frac{s_0}{2a} \cdot e^{\frac{2j\pi}{\lambda_0}\sin\theta \cdot \xi} \cdot d\xi$$

C'est bien l'expression proposée, avec :

$$\alpha = \frac{2j\pi}{\lambda_0} \sin\theta \cdot \xi$$

2)- l'amplitude de l'onde totale émise par la fente est la somme de toutes les amplitudes élémentaires, soit:

$$s = \frac{s_0}{2a} \int_{-a}^{a} \left(e^{\frac{2j\pi}{\lambda_0}\sin\theta \cdot \xi} \right) \cdot d\xi = \frac{s_0}{2a} \int_{-a}^{a} e^{ju\xi} d\xi \quad \text{avec } u = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin\theta$$

En intégrant l'expression, on obtient:

$$s = \frac{s_0}{2a} \frac{e^{jua} - e^{-jua}}{iu} = \frac{s_0}{a} \cdot \frac{\sin ua}{u} = s_0 \sin_c(ua)$$

Soit:

$$\boxed{s = s_0 \cdot \sin_c\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \cdot \sin\theta \right)}$$

Si on désigne par I_0 l'intensité envoyée dans la direction des x, l'intensité diffractée s'écrit:

$$\boxed{I = I_0 \cdot \sin_c^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} a \cdot \sin\theta \right)}$$

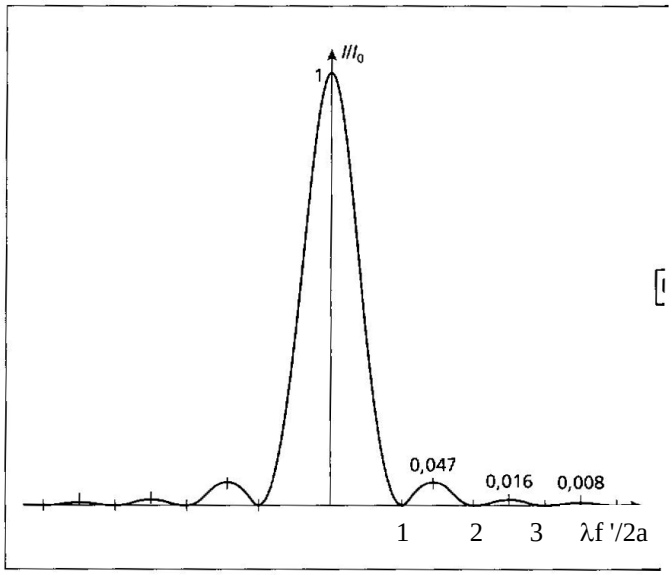
3)- Les rayons parallèles faisant l'angle θ avec l'axe des x se coupent dans le plan focal image de la lentille, en particulier celui qui passe par le centre optique de la lentille O, et qui n'est pas dévié par celle-ci. Les rayons faisant l'angle θ avec l'axe des x se coupent au point M du plan focal, d'abscisse y, telle que: $y = f' \cdot \tan\theta$.

L'angle θ est assez faible pour qu'on puisse considérer que $\sin\theta \simeq \theta \simeq \tan\theta$
Dans ces conditions, l'intensité diffractée dans la direction θ s'écrit:

$$\boxed{I = I_0 \cdot \sin_c^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0 f'} \cdot y\right)}$$

4)- $f(y) = \frac{I}{I_0}$ sa une limite égale à 1 en y=0, et s'annule pour toutes les autres valeurs de y qui annulent le sinus, soit:

$$\frac{2\pi a}{\lambda f'} y_{0n} = n \cdot \pi \quad \text{n est un entier différent de zéro}$$



D'où:

$$y_{0n} = n \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{2a}$$

Le premier max secondaire sera en $y_1 = 3\frac{\lambda f'}{4a}$. Numériquement:

$$f(y_1) = \sin_c^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{4}{9\pi^2} = 0,045$$

Cette valeur montre que la quasi-totalité de la lumière se trouve dans la frange centrale.
La largeur totale de la frange centrale est:

$$\frac{\lambda f'}{a} = \frac{\lambda}{\tan\varphi}$$

5)- Dans le cas d'une pupille circulaire de rayon a, le diamètre de la tache d'Airy s'écrit:

$$\boxed{d_0 = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{\tan\varphi}} \quad \text{numériquement:} \quad \boxed{d_0 = 1,52\ \mu m}$$

Deuxième partie: principe de la lecture:
6)- Tout se passe comme si les rayons arrivaient en incidence normale sur la face réfléchissante du disque (la lentille forme une image géométrique et ne modifie pas le chemin optique, et la diffraction incline les rayons d'un angle assez faible pour qu'on puisse considérer que son cos est égal à 1 (approximation du premier ordre).
Dans ces conditions, la différence de marche entre les rayon réfléchis par un plat et par un creux est: $\delta = 2e$.
7)- Si v est la vitesse de propagation de la lumière dans le polycarbonate, et ν la fréquence de la radiation, la longueur d'onde dans le polycarbonate s'écrit: $\lambda = \frac{v}{\nu}$. Dans le vide (ou dans l'air) où la vitesse de propagation est c, elle s'écrit: $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ On en déduit:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} = \frac{1}{n} \quad \text{soit:} \quad \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

numériquement: $\lambda = 490,6$ nm

L'intensité obtenue par la composition de deux rayons réfléchis sur un plat et un creux est nulle s'ils sont déphasés de $(2p+1)\cdot\pi$, p étant un entier. Or, le déphasage s'écrit: $\frac{2\pi}{\lambda}\delta$. La condition est donc remplie pour $\delta=(2p+1)\frac{\lambda}{2}$ et $e=(2p+1)\frac{\lambda}{4}$.

La plus petite valeur à donner à e est:

$$\boxed{e=\frac{\lambda}{4}} \qquad \text{Soit:} \qquad \boxed{e=0{,}123\ \mu\text{m}}$$

8)- En prenant $t_1=0$, les instants t_2, t_3 et t_4 s'écrivent:

$$t_2=\frac{d_0}{V};t_3=\frac{L-d_0}{V};t_4=\frac{L+d_0}{V}$$

soit numériquement:

$$\boxed{t_2=1{,}3\mu s} \qquad \boxed{t_3=2{,}46\mu s} \qquad \boxed{t_4=3{,}77\mu s}$$

9)- Au temps 0 (t_1), l'amplitude réfléchie est s_0. A un temps t quelconque, elle s'écrit:

$$s(t)=s_0\frac{\Sigma(t)-\sigma(t)}{\pi\cdot d_0^2}$$

avec:

- $0<t<t_2$:

$$\sigma(t)=l\cdot v\cdot t\ ;\ \Sigma(t)=\pi\cdot d_0^2-l\cdot v\cdot t \text{ et } s(t)=s_0\left(1-\frac{2l\cdot v\cdot t}{\pi\cdot d_0^2}\right)$$

- $t_2<t<t_3$:

$$\sigma(t)=l\cdot d_0\ ;\ \Sigma(t)=\pi\cdot d_0^2-l\cdot d_0 \text{ et } s=s_0\left(1-\frac{2l}{\pi\cdot d_0}\right)$$

- $t_3<t<t_4$:

$$\sigma(t)=l\cdot d_0-l\cdot v(t_4-t_3)\ ;\ \Sigma(t)=\pi\cdot d_0^2-l\cdot d_0+l\cdot v(t_4-t_3) \text{ et}$$

$$s(t)=s_0\left(1-\frac{2l}{\pi\cdot d_0}+\frac{2l\cdot v(t_4-t_3)}{\pi\cdot d_0^2}\right)$$

10)- Dans l'hypothèse où $\frac{2l}{\pi d_0}$ est petit devant 1, les intensités s'écrivent, en négligeant les termes du second ordre:

- $0<t<t_2$:

$$I(t)=I_0\left(1-\frac{4l\cdot Vt}{\pi\cdot d_0^2}\right)$$

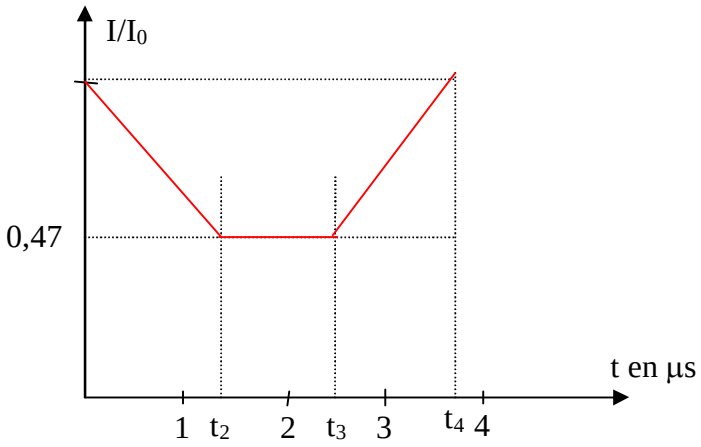
- $t_2<t<t_3$:

$$I(t)=I_0\left(1-\frac{4l}{\pi\cdot d_0}\right)$$

- $t_3<t<t_4$:

$$I(t)=I_0\left(1-\frac{4l}{\pi\cdot d_0}+\frac{4l\cdot V(t_4-t_3)}{\pi\cdot d_0^2}\right)$$

La courbe donnant la réponse du capteur du temps 0 au temps t_4 a donc l'allure suivante:



Cette courbe ne donne qu'une idée très approximative de la réalité: en effet, les différentes approximations effectuées mans=quent de précision. Toutefois, elle fait nettement apparaître des fronts montants et descendants en limite de creux, et des parties constantes (en réalité peu variables) sur les plats et les creux: ces dernières parties représentent les bits 0, tandis que les transitions plat-creux ou creux-plat représentent les bits 0.

Troisième partie

12)- La fonction de transfert du circuit donne le rapport entre la tension de sortie v_s et la tension d'entrée v_E, pour un régime sinusoïdal forcé, en notations complexes. Dans ces conditions, toute multiplication par $j\omega$ représente une dérivation par rapport au temps. La fonction de transfert s'écrit:

$$\frac{v_s}{v_E} = \frac{K}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

D'où l'équation différentielle du circuit:

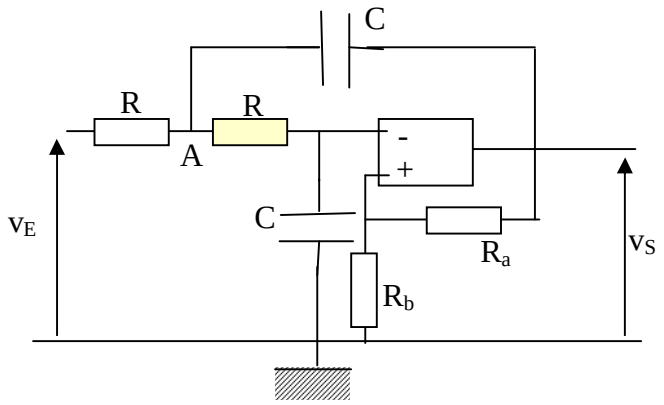
$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0}\frac{dv_s}{dt} + v_s = K \cdot v_E$$

13)- L'équation sans second membre représente les régimes transitoires du circuit.. Son équation caractéristique, du second degré, a des solutions de la forme:

$$r = -m \pm \sqrt{m^2 - \frac{1}{\omega_0^2}} \text{ ou } r = -m \pm j\sqrt{\frac{1}{\omega_0^2} - m^2}$$

Les solutions de l'équation différentielles dépendent du signe du discriminant, mais toutes sont précédées d'un terme multiplicatif en e^{-mt}. Elles ne tendront vers 0 que si m est positif.
La condition de stabilité du circuit est donc $m > 0$.

14)-



On est en régime linéaire stable, et l'AOP est parfait. Dans ces conditions, $v_+ = v_-$.
La tension de l'entrée + s'exprime en fonction de v_s :

$$v_+ = \frac{R_b}{R_a + R_b} \cdot v_s = \alpha \cdot v_s$$

Par ailleurs, la loi des nœuds en A (ou le théorème de Millman) s'écrit:

$$\frac{v_E - v_A}{R} = \frac{v_A - \alpha v_s}{R} + \frac{v_A - v_s}{Z}$$

Par ailleurs, la relation entre v_- et v_A s'écrit:

$$\alpha v_s = \frac{Z}{R+Z} \cdot v_A \text{, soit: } v_A = \alpha\left(1+\frac{R}{Z}\right)v_s$$

On en déduit:

$$\frac{v_E}{R} = v_A\left(\frac{2}{R}+\frac{1}{Z}\right) - v_s\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{1}{Z}\right) = \alpha\left(1+\frac{R}{Z}\right)v_s\left(\frac{2}{R}+\frac{1}{Z}\right) - v_s\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{1}{Z}\right)$$

soit:

$$v_E = \alpha \cdot v_s\left[1+\frac{3R}{Z}-\frac{R}{\alpha Z}+\frac{R^2}{Z^2}\right]$$

Z est l'impédance du condensateur: $\frac{1}{Z} = jC\omega$. On en déduit:

$$H(j\omega) = \frac{v_s}{v_E} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1-R^2C^2\omega^2+\left(3-\frac{1}{\alpha}\right)jC\omega}$$

15)- On trouve bien une fonction de transfert identique à celle proposée, avec:

$$K = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad m = \frac{3-\frac{1}{\alpha}}{2} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Le filtre est stable si m est positif, c'est-à-dire si $\alpha > \frac{1}{3}$: la condition est bien remplie.

Par ailleurs, si f_0 est la fréquence de coupure, on a: $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ soit: $R = \frac{1}{2\pi f_0 C}$

Numériquement:

$$R = 18812\Omega$$

A la coupure à -3 dB,l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$, puis décroît assez rapidement, mais ne s'annule pas brusquement. On a donc intérêt à mettre une coupure à 18 kHz pour qu'à 21 kHz, la tension résiduelle soit négligeable.