



Samedi 13 Avril 2019

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours 2019

Epreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction S de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \dots$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les principales propriétés de la fonction S . On en détermine en particulier des équivalents aux bornes de son intervalle de définition en exploitant une intégrale dont on étudie la convergence et la valeur dans la partie II.

■ PARTIE I : Etude de la fonction S

On exploite ici la série entière de la variable réelle t définie sous réserve de convergence par :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} = 1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \dots$$

1°) *Etude du domaine de définition des fonctions F et S*

- Examiner pour $|t| \geq 1$ la nature de la série $\sum t^{n^2}$.
- Pour tout réel t de $] -1, 1[$ et tout entier naturel n , justifier l'inégalité : $|t|^{n^2} \leq |t|^n$.
Etudier la convergence et expliciter la somme de la série $\sum |t|^n$ pour $n \geq 0$ et $|t| < 1$.
En déduire la nature des séries $\sum |t|^{n^2}$ et $\sum t^{n^2}$ pour $|t| < 1$.
- Préciser le domaine de définition de la fonction F .
- Déduire de ces résultats que la série $\sum e^{-x n^2}$ converge si et seulement si $x > 0$, puis exprimer alors sa somme $S(x)$ en fonction de $F(e^{-x})$.

2°) *Premières propriétés des fonctions F et S*

- Justifier que la fonction F est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
- Déterminer le sens de variation de F sur $[0, 1[$.
En déduire que la fonction F admet une limite finie ou infinie en 1.
- En exploitant l'inégalité $F(t) \geq \sum_{n=0}^N t^{n^2}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel t de $[0, 1[$, établir, pour tout entier naturel N , que $\lim_{t \rightarrow 1} F(t) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $F(t)$ lorsque t tend vers 1?
- Déduire des résultats précédents que la fonction S est de classe C^∞ sur $] 0, +\infty[$, et donner son sens de variation et les limites de $S(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.

3°) Recherche d'un équivalent de $S(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$

a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x n}.$$

b) En explicitant cette dernière somme, démontrer que $S(x) - 1 - e^{-x} = o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

4°) Recherche d'un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^2} dt \leq e^{-x n^2}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $x > 0$:

$$S(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt \leq S(x).$$

c) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer l'intégrale ci-dessus en posant $u = t \sqrt{x}$.

Retrouver alors $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$, puis donner un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

5°) Recherche d'une valeur approchée de $S(x)$

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-x t^2} dt.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) - \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{e^{-x N^2}}{2 N x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

d) Préciser une valeur approchée de $S(1)$ à 10^{-7} près.

■ PARTIE II : Calcul de l'intégrale de Gauss

On se propose ici de justifier l'existence et de calculer l'intégrale de Gauss, qu'on a exploitée précédemment à la question 4, et qui est définie par :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

6°) Convergence de l'intégrale de Gauss I

a) Pour tout réel $t \geq 1$, établir l'inégalité suivante : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) Justifier l'existence et préciser la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

c) En déduire l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$, puis de l'intégrale de Gauss I .

7°) *Etude des intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale de Wallis W_n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

a) Calculer les intégrales W_0 et W_1 .

b) A l'aide d'une intégration par parties du produit $\cos^{n+1}(t) = \cos(t) \cos^n(t)$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1}).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer W_{n+1} en fonction de W_{n-1} , puis justifier l'égalité suivante :

$$\forall n \geq 1, \quad (n+1) W_{n+1} W_n = n W_n W_{n-1}.$$

En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 1$: $n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

c) Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'inégalité $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$.

En déduire l'équivalence $W_{n-1} \sim W_n$.

d) Déduire des résultats précédents l'équivalence : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8°) *Calcul de l'intégrale de Gauss I*

a) Pour tout réel $x > -1$, établir l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$, les inégalités suivantes :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}.$$

b) A l'aide de ces inégalités, établir la double inégalité suivante pour $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n} \sin(u)$ dans la première de ces intégrales, et $t = \sqrt{n} \tan(u)$ dans la dernière de celles-ci, établir qu'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

d) A l'aide de l'équivalent de W_n obtenu au 7°, déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss I .