



Samedi 04 Avril 2020

ÉPREUVES: MATHÉMATIQUES

PT / TSI

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours EPITA-IPSA-ESME 2020

Epreuve de mathématiques PT-TSI

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

■ PARTIE I : ETUDE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

On considère une variable aléatoire X , à valeurs dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels n , dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \mathbb{P}(X = 2n) = \mathbb{P}(X = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

1°) *Résultats préliminaires*

a) Préciser le rayon de convergence et expliciter la somme des trois séries entières suivantes lorsqu'elles convergent (où l'on notera que la sommation démarre à $n = 1$) :

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n, \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, puis vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$, puis vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = 24$.

2°) *Calcul direct de l'espérance et de la variance de X*

a) A l'aide des résultats précédents, préciser les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}}$.

b) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .

c) A l'aide des résultats précédents, préciser les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{2^{n+1}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$.

d) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X^2)$ de X^2 , puis la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X .

3°) *Calcul de l'espérance de X à l'aide d'une fonction auxiliaire*

On considère, sous réserve de convergence, la fonction définie par $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$.

b) En déduire que G est définie pour $|x| < \sqrt{2}$, et qu'on a alors l'égalité :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n = \frac{x^2 + x^3}{2(2 - x^2)}.$$

c) Comparer $G'(1)$ et $\mathbb{E}(X)$, calculer $G'(x)$ et retrouver le résultat de la question 2.b).

d) Comparer $G''(1)$ et $\mathbb{E}(X(X-1))$, et sachant que $G''(1) = 24$, retrouver $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.

■ PARTIE II : ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

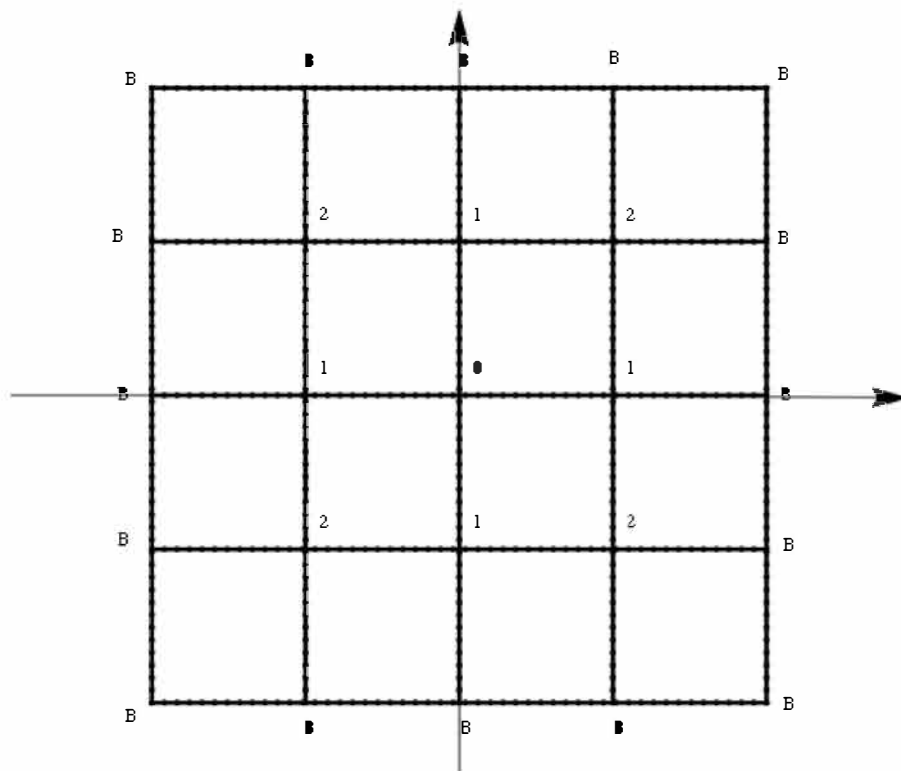
On considère la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$ avec :

- les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leq x \leq 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $-2 \leq y \leq 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i, j) avec $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C , et B les points du bord du carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i, j) où $i, j \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ de la grille ci-dessus.

Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

- 1) à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en O (0, 0).
- 2) à tout instant n , si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C , il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M , de façon à se trouver à l'instant $n + 1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M .
- 3) à tout instant n , si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2, 2] \times [-2, 2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i, j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

4°) Etude d'une suite de variables aléatoires (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1, 2 ou B de l'individu à l'instant n . Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

a) Justifier brièvement les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) = 0, \quad \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) = 1.$$

En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2)$, $\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2)$.

En déduire $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

c) En procédant de même :

- exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
- exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

d) Déduire de ces résultats une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

5°) Diagonalisation de la matrice M

Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont 1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 .

a) Déterminer toutes les composantes des quatre vecteurs propres suivants de M :

- le vecteur propre U_1 de \mathbb{R}^4 de composantes $(x, y, z, 1)$ associé à $\lambda = 1$.
(La dernière composante de U_1 est égale à 1).
- le vecteur propre U_2 de \mathbb{R}^4 de composantes $(x, y, -6 + 4\sqrt{2}, 1)$ associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Les 2 dernières composantes de U_2 sont respectivement $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1).

- le vecteur propre U_3 de \mathbb{R}^4 de composantes $(x, y, -6 - 4\sqrt{2}, 1)$ associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Les 2 dernières composantes de U_3 sont respectivement $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1).

- le vecteur propre U_4 de \mathbb{R}^4 de composantes $(x, y, z, 1)$ associé à $\lambda = 0$.
(La dernière composante de U_4 est égale à 1).

b) On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4 .

On note D la matrice diagonale $D = \text{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1} .

6°) Lois des variables aléatoires X_n

Pour tout entier naturel n , on désigne par V_n le vecteur-colonne de \mathbb{R}^4 dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = B)$.

a) Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n , qu'on a : $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.

b) Soit X un vecteur-colonne de \mathbb{R}^4 dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4 .

Déterminer X tel que $PX = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$).

c) En déduire $P^{-1}V_0$, puis $D^n P^{-1}V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Vérifier pour $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_n = B)$ lorsque n tend vers $+\infty$?