

# Quelques moyens de mesure du temps

Total barème : sur 65.

## I Mesure du temps par horloge à balancier : étude du pendule (33pt) \_\_\_\_\_

### Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle (2pt)

1. La période peut dépendre des grandeurs  $g$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ],  $m$  [kg] et  $l$  [m]. (1pt)

Seule possibilité pour former un temps :  $\sqrt{\frac{l}{g}}$ . On doit donc avoir  $T = A\sqrt{\frac{l}{g}}$  avec  $A$  sans dimension. (1pt)

**Remarque :** On accepte indifféremment les raisonnements sur les unités ou les dimensions.

### Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations (12pt)

2. Moment cinétique de la masse en  $M$  :  $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_x$ .

(définition  $\vec{\sigma}$  1pt, expression finale 1pt)

3. Moment en O du poids :  $\vec{\Gamma}(m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = l\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_z = -mgl \sin \theta \vec{e}_x$ .

Moment en O de la tension du fil :  $\vec{\Gamma}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ .

TMC en O au système {masse  $m$ } :  $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\Gamma}(m\vec{g}) + \vec{\Gamma}(\vec{T})$ .

D'où  $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$ , soit  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ .

(moments corrects 2pt, théorème correct 1pt, équation finale 1pt)

4. Hypothèse  $\theta \ll 1$ , donc  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ . On pose  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

Solution générale  $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ .

C.I. :  $\dot{\theta}(0) = 0$  donc  $B = 0$ , puis  $\theta(0) = \theta_0$  donc  $A = \theta_0$ .

Donc  $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$ .

(hypothèse  $\theta \ll 1$  1pt, résolution générale 1pt, expression des constantes 1pt)

5.  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g}$ . (1pt)

6.  $l = g \frac{T_0^2}{4\pi^2} = 0,99 \text{ m}$  ( $T_0 = 2 \text{ s}$ ) (expression 1pt, AN 1pt)

### Expression de la période dans le cas des grandes oscillations (11pt)

7.  $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ ;  $E_{p,pes} = +mgz = -mgl \cos \theta$  (car  $z = -l \cos \theta$ ).

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta.$$

(1pt pour  $E_c$ , 1pt pour  $E_p$ , 1pt pour  $E_m$ )

8.  $E_m = \text{cst}$  via le théorème de l'énergie mécanique, car toutes les forces qui travaillent sont conservatives (1pt).

Or  $E_{m,\text{initial}} = -mgl \cos \theta_0$ , d'où  $E_m = -mgl \cos \theta_0$  (1pt).

9.  $\frac{1}{2}ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_0$  et on isole  $d\theta = dt \times \sqrt{\frac{2g}{l} \cos \theta - \cos \theta_0}$ .

(1pt pour l'idée d'utiliser  $E_m$  pour isoler  $d\theta$ , 1pt pour calculs)

10.

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_{t=0}^{T/4} dt \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \\ T &= T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \quad \text{avec } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \end{aligned} \quad (1)$$

(1pt pour l'idée du calcul d'intégrale; 1pt pour les bornes; 2pt à répartir pour le calcul correct)

## Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes (8pt)

11. Étape 1, DL :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \omega_0^2 \frac{\theta^3}{6} = 0$ .

Étape 2 : on remplace  $\theta$  par son expression :  $-\omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \sin^3 \omega t = 0$ .

Étape 3 : on utilise la formule trigo en négligeant le terme  $\sin 3\omega t$  :  $-\omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \frac{3}{4} \sin \omega t = 0$ .

Enfin, on isole  $\omega$  :  $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)$ .

(3pt, un par étape)

12. On a  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)^{-1/2} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta_0^2}{8}\right)$ .

On a bien  $T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$ .

(1pt si formule DL correcte, 1pt pour l'expression finale)

13.  $\theta_0 = 30^\circ = 0,5 \text{ rad}$ , on lit alors un écart de  $2 \times 10^{-4}$  soit 0,02%. (1pt)

14. Avec la formule :  $3600T = 3662$  soit une heure et 62s (ou par lecture graphique,  $T \simeq 1,2\text{s}$  et  $3600T \simeq 3672\text{s}$ ). (1pt)

Sur une journée, ceci donne un retard de 24 minutes, bien supérieur aux dix secondes données dans le graphique.

Ceci montre que Huygens avait bien pris en compte la dépendance en  $\theta_0$ . (1pt)

## II La révolution de l'horloge à quartz (32pt)

### II.1 Étude d'un circuit à quartz (24pt)

#### Étude du quartz (18pt)

15.  $\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_q}$  par définition de l'impédance. (1pt)

16. Calcul de l'impédance équivalente :  $\frac{1}{\underline{Z}_q} = jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} = \dots = jC_{\text{eq}}\omega \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2}$ ,

avec  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} L_1}}$  et  $C_{\text{eq}} = C_0 + C_1$ .

(1pt pour définition de  $Z_{\text{eq}}$ , 3pt pour calculs)

17.  $1/|\underline{Z}_q| \rightarrow \infty$  pour  $\omega = \omega_1$ , l'amplitude de  $i$  diverge, donc  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$ . (1pt)

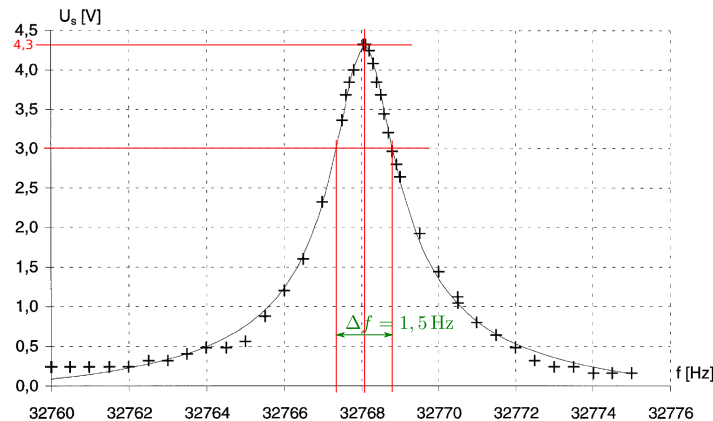
18.  $\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_{C_1+L_1+r}} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \frac{jL_1\omega}{r} + \frac{1}{jrC_1\omega}} = \dots = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}$  avec  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$  et  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ .

(1pt pour démarrage correct, 2pt pour calculs)

19. À la résonance,  $i = \frac{u_e}{r}$ . Donc  $U_s = Ri_0 = \frac{Ru_0}{r}$ .

On lit  $U_s = 4,3 \text{ V}$ , donc  $r = \frac{Ru_0}{U_s} = \frac{47 \text{ k}\Omega \times 0,2}{4,3} = 2,2 \text{ k}\Omega$ .

(1pt expression, 1pt AN)



20. Mesure de la largeur  $\Delta f : 4,3 \text{ V} / \sqrt{2} = 3 \text{ V}$ , on lit  $\Delta f = 1,5 \text{ Hz}$ . (1pt définition, 1pt mesure)

D'où  $Q = \frac{32768}{1,5} = 22\,000 \simeq 20\,000$ . (1pt)

21.  $L_1 = \frac{rQ}{\omega_1}$  et  $C_1 = \frac{1}{\omega_1 r Q}$ . (1pt  $L_1$ , 1pt  $C_1$ )

22.  $L_1 = 200 \text{ H}$ . (1pt)

Ces valeurs ne sont pas des valeurs usuelles pour des composants électroniques. C'est normal, car il ne s'agit pas de composants réels, mais d'outils servant à modéliser la réponse mécanique du quartz. On peut aussi dire qu'il serait impossible de concevoir un circuit électronique compact avec ces valeurs. (1pt)

## Utilisation dans une montre (3pt)

23. Temps d'oscillations libres  $\sim Q/f_1 \simeq 1 \text{ s}$ . Ce n'est pas raisonnable pour fabriquer une horloge, il faut entretenir les oscillations. (1pt expression, 1pt commentaire)

24. La montre doit délivrer un signal de fréquence 1 Hz, qui est obtenu en divisant par deux plusieurs fois de suite le signal à 32 768 Hz. (Une division par deux est effectuée facilement à l'aide d'un circuit logique.) (1pt)

## Précision (3pt)

25. Pour une seconde, la variation est de  $10^{-6} \text{ s}$ . Sur une journée, soit 86400 s, elle sera donc de 86 ms. (1pt)

26. C'est bien supérieur à la précision atteinte par les horloges à quartz indiquées dans la figure. (1pt)

Un moyen simple de contrôle est de placer le quartz dans une enceinte contrôlée en température. (1pt)

## II.2 Dissémination du temps atomique par radio (8pt)

27. Polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_y$ . Propagation selon les  $x$  croissants. (1pt)

28. Champ magnétique associé :  $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ . (1pt pour la formule, 1pt pour le calcul correct)

29.  $\vec{\Pi}(x,t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x}{\mu_0 c}$  (1pt pour la formule, 1pt pour le calcul correct)

Valeur moyenne sur une période de l'onde :  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 \vec{e}_x}{2\mu_0 c}$ . (1pt)

30.  $\delta t = \frac{d}{c} = 1 \text{ ms}$ . (1pt)

31. L'incertitude est donc de l'ordre de la milliseconde.

C'est bien supérieur aux incertitudes des horloges atomiques. (1pt)