



Samedi 13 Avril 2019

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice autorisée

Concours 2019

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les n valeurs propres a priori complexes sont supposées *réelles* et on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ses p valeurs propres *distinctes*. Enfin, on note comme d'habitude I_n la matrice-identité d'ordre n .

■ Partie I : Série entière matricielle et polynôme d'interpolation matriciel

1°) *Polynôme minimal de la matrice A*

a) Etablir que les $n^2 + 1$ matrices $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ sont liées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi l'ensemble des entiers $k \geq 1$ tels que les matrices $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^k$ sont liées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forme une partie non vide de l'ensemble \mathbb{N} . Celle-ci admet donc un plus petit élément $d \geq 1$, de sorte qu'il existe des réels m_0, m_1, \dots, m_d non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^d m_i A^i = 0$.

b) Justifier que m_d est non nul, et en déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire M de degré d (appelé *polynôme minimal de A*) tel que $M(A) = 0$. On posera dans la suite :

$$M(X) = X^d + \mu_{d-1} X^{d-1} + \dots + \mu_1 X + \mu_0.$$

c) On désigne par v_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i de A ($1 \leq i \leq p$).

Préciser $Av_i, A^2 v_i, \dots, A^d v_i$ en fonction de λ_i et v_i , puis montrer que $M(A) v_i = M(\lambda_i) v_i$.

En déduire que $M(\lambda_i) = 0$, et que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont racines du polynôme minimal M .

d) On suppose qu'il existe une racine réelle ou complexe μ de M qui n'est pas valeur propre de A .

Il existe donc un polynôme N à coefficients réels ou complexes tel que $M(X) = (X - \mu) N(X)$, et on a par conséquent $M(A) = (A - \mu I_n) N(A) = 0$.

Etablir que la matrice $A - \mu I_n$ est inversible, que $N(A) = 0$, puis en déduire une contradiction.

Ainsi, les seules racines de M sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et on posera en introduisant les ordres de multiplicité r_1, r_2, \dots, r_p des racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ du polynôme M :

$$M(X) = X^d + \mu_{d-1} X^{d-1} + \dots + \mu_1 X + \mu_0 = (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \dots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

Le degré de ce polynôme M est donc $d = r_1 + r_2 + \dots + r_p$, et on garde ces notations dans la suite.

2°) *Polynôme d'interpolation aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicités r_1, r_2, \dots, r_p*

Soit l'application φ associant à tout polynôme P de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $d - 1$ le d -uplet $\varphi(P)$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^d dont :

- les r_1 premiers éléments sont $P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \dots, P^{(r_1-1)}(\lambda_1)$,

- les r_2 éléments suivants sont $P(\lambda_2), P'(\lambda_2), \dots, P^{(r_2-1)}(\lambda_2)$,

.....

- les r_p derniers éléments sont $P(\lambda_p), P'(\lambda_p), \dots, P^{(r_p-1)}(\lambda_p)$.

a) Vérifier brièvement que l'application φ est linéaire, puis montrer qu'elle est injective de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ dans \mathbb{R}^d , et établir enfin que φ réalise un isomorphisme entre ces espaces vectoriels.

b) Etant donnée une fonction indéfiniment dérivable f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , déduire de ce résultat qu'il existe un et un seul polynôme L de degré inférieur ou égal à $d - 1$ tel que :

$$\forall i \in [1, p], \quad L(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad L'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), \quad \dots, \quad L^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i).$$

On dit que L est le polynôme d'interpolation de f aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités r_1, \dots, r_p .

- c) On note ici $(L_{1,0}, L_{1,1}, \dots, L_{1,r_1-1}, L_{2,0}, L_{2,1}, \dots, L_{2,r_2-1}, \dots, L_{p,0}, L_{p,1}, \dots, L_{p,r_p-1})$ la base de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ obtenue par image réciproque par φ de la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_d) de \mathbb{R}^d .
 Expliciter $\varphi(L_{1,0})$, $\varphi(L_{1,1})$ et $\varphi(L_{1,j})$ pour $0 \leq j \leq r_1 - 1$, puis vérifier que $\varphi(L_{1,r_1-1}) = e_{r_1}$.
 Expliciter $\varphi(L_{2,0})$, $\varphi(L_{2,1})$ et $\varphi(L_{2,j})$ pour $0 \leq j \leq r_2 - 1$, puis vérifier que $\varphi(L_{2,r_2-1}) = e_{r_1+r_2}$.
 Expliciter généralement le d -uplet $\varphi(L_{i,j})$ pour $1 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq r_i - 1$, puis en déduire que :

$$L(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{r_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) L_{i,j}(X).$$

- d) Exprimer en fonction de L les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ (sans condition de degré sur P) tels que :
 $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\lambda_i) = f(\lambda_i), P'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), \dots, P^{(r_i-1)}(\lambda_i) = f^{(r_i-1)}(\lambda_i).$

3°) *Série entière en la matrice A et polynôme d'interpolation en la matrice A*

On considère une série entière réelle $\sum a_l x^l$, de rayon de convergence $R = +\infty$.

On introduit alors la somme et les sommes partielles de la série entière précédente pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l x^l \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) = \sum_{l=0}^k a_l x^l.$$

- a) On effectue la division euclidienne du polynôme f_k par le polynôme minimal M :

$$f_k(X) = Q_k(X) M(X) + L_k(X) \quad \text{avec} \quad d^\circ(L_k) < d^\circ(M) = d.$$

Comparer $f_k(\lambda_i)$ et $L_k(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$, puis $f_k^{(j)}(\lambda_i)$ et $L_k^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq r_i - 1$.
 En déduire que L_k est le polynôme d'interpolation de f_k aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités r_1, \dots, r_p , puis justifier l'égalité suivante :

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{r_i-1} f_k^{(j)}(\lambda_i) L_{i,j}(X).$$

- b) Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq r_i - 1$.

En déduire la limite de $L_k(A)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

- c) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre, c'est à dire d'une norme telle que $\|A B\| \leq \|A\| \|B\|$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir que la série $\sum a_l A^l$ converge absolument.

- d) On peut donc introduire la matrice $f(A) = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l A^l$, somme de la série convergente précédente.

Comparer $f_k(A)$ et $L_k(A)$, puis démontrer que $f(A) = L(A)$.

■ Partie II : Deux exemples d'applications

4°) *Un premier exemple*

On considère deux réels a et b avec $b \neq 0$ et on choisit dans cette question pour matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

- a) Justifier que cette matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 b) Montrer que $\lambda_1 = a - b$ est valeur propre de A . Préciser le sous-espace propre associé.
 Montrer que $\lambda_2 = a + 2b$ est valeur propre de A . Préciser le sous-espace propre associé.
 c) Calculer A^2 et l'exprimer comme combinaison linéaire de A et I_3 .

En déduire le polynôme minimal M de cette matrice A , c'est à dire le polynôme de coefficient dominant égal à 1 et de plus bas degré annulant la matrice A , et factoriser ce polynôme M .

d) De nouveau, f est ici une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} développable en série entière de rayon $R = +\infty$.

Expliciter le polynôme L de degré 1 tel que $L(a - b) = f(a - b)$ et $L(a + 2b) = f(a + 2b)$.

Préciser alors $f(A)$ comme combinaison linéaire de A et I_3 .

5°) *Un second exemple*

On revient au cas général où la matrice A est celle introduite dans le préambule, et on pose :

$$\cos(A) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{A^{2l}}{(2l)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{A^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

et on note L_c et L_s les polynômes d'interpolation des fonctions \cos et \sin aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités r_1, \dots, r_p .

a) Comparer $L_c(A)$ et $\cos(A)$ d'une part, $L_s(A)$ et $\sin(A)$ d'autre part.

b) Evaluer le polynôme $L_c^2 + L_s^2 - 1$ aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ainsi que ses dérivées successives

$(L_c^2 + L_s^2 - 1)^{(j)}(\lambda_i) = (L_c^2)^{(j)}(\lambda_i) + (L_s^2)^{(j)}(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq r_i - 1$ (on peut à cet effet exploiter la formule de Leibniz). Qu'en déduit-on pour le polynôme $L_c^2 + L_s^2 - 1$?

c) En déduire que $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_n$.