
Concours CPGE EPITA/IPSA/ESME 2020

Corrigé de l'épreuve de mathématiques PT - TSI (3h)

■ PARTIE I : ETUDE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

1°) Résultats préliminaires

a) La série géométrique $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et diverge grossièrement sinon. La série entière suivante a donc pour rayon de convergence $R = 1$ et a pour somme si $|x| < 1$:

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

On sait qu'une série entière se dérive terme à terme sur $] -R, R[$, et la série-dérivée a même rayon de convergence. Les séries entières suivantes ont donc pour rayon de convergence $R = 1$ et :

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = S_0'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = S_1'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

b) On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} S_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

c) En exploitant les résultats de (a), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S_1\left(\frac{1}{2}\right) = 4, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = S_2\left(\frac{1}{2}\right) = 16.$$

On note alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}.$$

De cette dernière égalité résulte maintenant que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 16 + 8 = 24.$$

2°) Calcul direct de l'espérance et de la variance de X

a) D'après les résultats de convergence et les calculs de sommes de la question 1°, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

b) L'espérance de X , si elle existe, est la somme de la série suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \mathbb{P}(X = 2n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) \mathbb{P}(X = 2n+1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

La convergence déjà établie de ces dernières séries implique la convergence des précédentes.

Ainsi donc, on a : $\mathbb{E}(X) = \frac{9}{2}$.

c) D'après les résultats précédents de la question 1°, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-2}} = 12. \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 12 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}.\end{aligned}$$

d) L'espérance de X^2 , si elle existe, est la somme de la série suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n)^2 \mathbb{P}(X = 2n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)^2 \mathbb{P}(X = 2n+1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}} = 12 + \frac{33}{2} = \frac{57}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{57}{2} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$.

3°) Calcul de l'espérance de X à l'aide d'une fonction auxiliaire

a) On peut reconnaître dans la série proposée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$ une série géométrique de raison $\frac{x^2}{2}$.

Ainsi, elle converge absolument pour $x^2 < 2$ ou $|x| < \sqrt{2}$ et diverge grossièrement sinon.

Son rayon de convergence est $R = \sqrt{2}$ (ce qu'on peut aussi obtenir par la règle d'Alembert) et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = S_0\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{2 - x^2}.$$

b) Compte tenu du résultat obtenu ci-dessus, le calcul suivant donne à la fois la convergence de la série suivante pour $|x| < \sqrt{2}$ et sa somme :

$$\begin{aligned}G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n) x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n+1) x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x+1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}} = \frac{x+1}{2} \frac{x^2}{2 - x^2} = \frac{x^3 + x^2}{2(2 - x^2)}.\end{aligned}$$

c) On sait qu'on peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle de convergence.

Pour $|x| < \sqrt{2}$, on a donc :

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) x^{n-1} = \frac{4x + 6x^2 - x^4}{2(2 - x^2)^2}.$$

En faisant $x = 1$, on obtient : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \frac{9}{2}$, ce qu'on avait déjà obtenu.

d) De même, on peut redériver terme à terme la série entière sur son intervalle de convergence.

Pour $|x| < \sqrt{2}$, on a donc :

$$G''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) x^{n-1}.$$

En faisant $x = 1$, on obtient donc : $G''(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X(X-1))$.

Cette dernière égalité résulte en effet du théorème de transfert, et comme $G''(1) = 24$, on a :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = 24.$$

On en déduit : $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 24 + \frac{9}{2} = \frac{57}{2}$, et on retrouve de même $\mathbb{V}(X)$.

■ PARTIE II : ETUDE D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

4°) Etude d'une suite de variables aléatoires (X_n)

a) D'après les règles de la marche aléatoire, on a $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) = 0$ puisqu'on ne peut aller depuis l'origine O à un point du bord en une seule étape.

Selon les mêmes règles, on a $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{2}$ puisque :

- à partir de tout point noté 1, un seul chemin sur quatre conduit à un point noté B,
- à partir de tout point noté 2, deux chemins sur quatre conduisent à un point noté B.

Enfin, $\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) = 1$ puisqu'une fois parvenu en un point du bord, on y reste.

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet formé des événements $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$, $(X_n = 2)$, $(X_n = B)$, ce qui conduit successivement à :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = B) &= \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = B) + \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2) \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) + \mathbb{P}(X_n = B) \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) \\ &= \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = B). \end{aligned}$$

b) De même, les règles de la marche aléatoire conduisent à :

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0, \quad \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0, \quad \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2) = 0.$$

A nouveau, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2) \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = B) \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1). \end{aligned}$$

c) En procédant de même, on obtient encore :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2) \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = B) \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 2). \\
 \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_n = 2) \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(X_n = B) \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = 0) \\
 &= \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 1).
 \end{aligned}$$

d) En regroupant ces résultats, on obtient donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}.$$

5°) Diagonalisation de la matrice M

a1) Le vecteur propre U_1 associé à $\lambda = 1$ de dernière composante égale à 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $x - \frac{y}{4} = 0$, $x - y + \frac{z}{2} = 0$, $\frac{y}{2} - z = 0$, $\frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 0$.

On en déduit que les composantes de U_1 sont $(0, 0, 0, 1)$.

a2) le vecteur propre U_2 associé à $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ de dernières composantes $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -6 + 4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -6 + 4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{4} = 0$, $x - \frac{y}{\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$, $\frac{y}{2} = 4 - 3\sqrt{2}$, $\frac{y}{4} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

On en déduit que les composantes de U_2 sont $(-3 + 2\sqrt{2}, 8 - 6\sqrt{2}, -6 + 4\sqrt{2}, 1)$.

a3) le vecteur propre U_3 associé à $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ de dernières composantes $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -6 - 4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -6 - 4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{4} = 0$, $x_1 + \frac{y}{\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$, $\frac{y}{2} = 4 + 3\sqrt{2}$, $\frac{y}{4} = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

On en déduit que les composantes de U_3 sont $(-3 - 2\sqrt{2}, 8 + 6\sqrt{2}, -6 - 4\sqrt{2}, 1)$.

a4) le vecteur propre U_4 associé à $\lambda = 0$ de dernière composante 1 vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout donc : $\frac{y}{4} = 0$, $x + \frac{z}{2} = 0$, $\frac{y}{2} = 0$, $\frac{y}{4} + \frac{z}{2} = -1$.

On en déduit que les composantes de U_4 sont $(1, 0, -2, 1)$.

b) La matrice M étant d'ordre 4 et ayant 4 valeurs propres réelles distinctes est diagonalisable. De plus, une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de M est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -3 + 2\sqrt{2} & -3 - 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8 - 6\sqrt{2} & 8 + 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6 + 4\sqrt{2} & -6 - 4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt la relation : $D = P^{-1} M P$ avec $D = \text{Diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

6°) *Lois des variables aléatoires X_n*

a) D'après les règles de la marche aléatoire, les composantes de V_0 sont $(1, 0, 0, 0)$.

D'après la question 4°, on a $V_{n+1} = M V_n$, d'où par récurrence immédiate $V_n = M^n V_0$.

D'après la question 5°, on a $M = P D P^{-1}$, d'où $V_n = (P D P^{-1})^n V_0 = P D^n P^{-1} V_0$.

b) Comme les composantes de V_0 sont $1, 0, 0, 0$, le système $P X = V_0$ s'écrit :

$$\begin{cases} (-3 + 2\sqrt{2})x_2 - (3 + 2\sqrt{2})x_3 + x_4 = 1 \\ (8 - 6\sqrt{2})x_2 + (8 + 6\sqrt{2})x_3 = 0 \\ (-6 + 4\sqrt{2})x_2 - (6 + 4\sqrt{2})x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

En retirant 2 fois (1) à (3), on obtient : $2x_4 = 1$ et $x_4 = \frac{1}{2}$, ce qui ramène au système suivant :

$$\begin{cases} (-3 + 2\sqrt{2})x_2 - (3 + 2\sqrt{2})x_3 = \frac{1}{2} \\ (4 - 3\sqrt{2})x_2 + (4 + 3\sqrt{2})x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $x_2 = -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$, et il reste alors $x_1 = 1$.

c) Comme l'égalité $P X = V_0$ est équivalente à l'égalité $X = P^{-1} V_0$, on en déduit aussitôt que les composantes du vecteur $P^{-1} V_0$ sont $1, -\frac{3+2\sqrt{2}}{4}, -\frac{3-2\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}$.

La relation $V_n = P D^n P^{-1} V_0$ s'écrit maintenant avec $n \geq 1$ (pour avoir $0^n = 0$) :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 + 2\sqrt{2} & -3 - 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8 - 6\sqrt{2} & 8 + 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6 + 4\sqrt{2} & -6 - 4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit, toujours pour $n \geq 1$, à :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 + 2\sqrt{2} & -3 - 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8 - 6\sqrt{2} & 8 + 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6 + 4\sqrt{2} & -6 - 4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+2\sqrt{2}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n} \\ -\frac{3-2\sqrt{2}}{4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un dernier produit matriciel donne enfin pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n. \\ \mathbb{P}(X_n = 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n. \\ \mathbb{P}(X_n = 2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n. \\ \mathbb{P}(X_n = B) &= 1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n. \end{aligned}$$

d) On observe que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ pour $n \geq 1$, et que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_{2n} = 2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2^n}.$$

On vérifie par ailleurs la formule proposée pour $\mathbb{P}(X_n = B)$, et on observe, quand n tend vers $+\infty$, que sa limite est donc égale à 1.

7°) Temps d'attente pour atteindre le bord du carré

a) Pour tout entier $n \geq 1$, l'événement $T \leq n$ signifie que l'individu a atteint le bord du carré avant l'instant n (au sens large), ce qui signifie de façon équivalente que l'événement $X_n = B$ est réalisé. On a donc $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(X_n = B)$.

b) Compte tenu de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = 1$ obtenu en 6°, il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = 1.$$

c) L'événement $T = 2n$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} \neq B$, autrement dit si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} = 1$ ou 2 . Comme on a vu que $X_{2n-1} = 2$ est impossible, l'événement $T = 2n$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n} = B$ et $X_{2n-1} = 1$, soit :

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \mathbb{P}((X_{2n} = B) \cap (X_{2n-1} = 1)) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1) \mathbb{P}_{X_{2n-1}=1}(X_{2n} = B) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

d) De même, l'événement $\mathbb{P}(T = 2n + 1)$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} \neq B$, autrement dit si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} = 1$ ou 2 . Comme on a vu que $X_{2n} = 1$ est impossible, l'événement $T = 2n + 1$ est réalisé si et seulement si on a $X_{2n+1} = B$ et $X_{2n} = 2$, soit :

$$\mathbb{P}(T = 2n + 1) = \mathbb{P}((X_{2n+1} = B) \cap (X_{2n} = 2)) = \mathbb{P}(X_{2n} = 2) \mathbb{P}_{(X_{2n}=2)}(X_{2n+1} = B) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a donc $\mathbb{P}(T = 2n) = \mathbb{P}(T = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

e) La loi de la variable aléatoire T n'est autre que celle de la variable aléatoire X de la partie I.

On en déduit que $\mathbb{E}(T) = \frac{9}{2}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{33}{4}$.
