



# CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

## EPREUVE : MATHEMATIQUES

*PT / TSI*

Samedi 15 Avril 2017

**Durée : 3 Heures**

---

**Condition(s) particulière(s)**

Calculatrice interdite

Dans tout ce problème, on désigne par  $\alpha$  un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction  $f$  définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt.$$

Dans la partie I, on étudie la convergence de l'intégrale  $f(\alpha)$ , puis la limite de  $f(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 2. Dans la partie II (qui est indépendante de la partie I), on calcule ensuite la valeur de  $f(\alpha)$  pour  $\alpha = 1$ .

### ■ Partie I : Etude de la fonction $f$

1°) Etude de l'intégrale  $f(\alpha)$  pour  $\alpha = 0$

- a) Calculer l'intégrale  $\int_0^x \sin(t) dt$ . Celle-ci a-t-elle une limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ?
- b) En déduire pour  $\alpha = 0$  la nature de l'intégrale  $f(\alpha)$ .

2°) Etude de l'intégrale  $f(\alpha)$  pour  $\alpha \geq 2$

- a) Donner un équivalent de la fonction  $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$  quand  $t$  tend vers 0.
- b) En déduire pour  $\alpha \geq 2$  la nature de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ , puis de l'intégrale  $f(\alpha)$ .

3°) Etude d'une intégrale auxiliaire pour  $0 < \alpha < 2$

- a) Donner un équivalent lorsque  $t$  tend vers 0 de la fonction  $\varphi_\alpha$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$  pour  $\alpha < 2$ .

- b) Etudier la convergence des intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$ , puis  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ , pour  $\alpha > 0$ .
- c) En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$  pour  $0 < \alpha < 2$ .

4°) Convergence de l'intégrale  $f(\alpha)$  pour  $0 < \alpha < 2$

- a) Démontrer l'égalité suivante dans laquelle  $a$  et  $b$  désignent deux réels tels que  $b > a > 0$  :

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha} \right]_a^b + \alpha \int_a^b \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

- b) Déterminer un équivalent et la limite en 0 de la fonction  $t \rightarrow \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha}$  pour  $0 < \alpha < 2$ .
- c) Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $t \rightarrow \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha}$  pour  $0 < \alpha < 2$ .

d) En déduire que l'intégrale  $f(\alpha)$  converge pour  $0 < \alpha < 2$ , et qu'on a l'égalité :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

5°) *Limite de  $f(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 2*

On considère la fonction auxiliaire  $\varphi_1$  définie pour  $t \in \mathbb{R}^*$  par  $\varphi_1(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ .

a) Quelle est la limite  $L$  de  $\varphi_1(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0?

On posera désormais  $\varphi_1(0) = L$ , de sorte que  $\varphi_1$  est ainsi définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que la fonction  $\varphi_1$  reste strictement positive sur  $[0, \pi]$ , et justifier qu'elle admet sur  $[0, \pi]$  un minimum strictement positif noté  $\mu$  (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c) Justifier les inégalités et l'égalité suivantes :

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \alpha \int_0^\pi \frac{\varphi_1(t)}{t^{\alpha-1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) En déduire la limite de  $f(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 2 par valeurs inférieures.

## ■ Partie II : Calcul de l'intégrale $f(1)$

6°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Justifier pour tout entier naturel  $n$  l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

b) Préciser la valeur de  $I_0$ , et prouver qu'on a  $I_n - I_{n-1} = 0$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

En déduire la valeur de l'intégrale  $I_n$ .

c) On considère la fonction auxiliaire  $\psi$  définie pour  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$  par  $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ .

Donner un équivalent lorsque  $t$  tend vers 0 des fonctions  $t \rightarrow t - \sin(t)$  et  $t \rightarrow \psi(t)$ .

En déduire la limite  $L$  de  $\psi(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0.

On posera désormais  $\psi(0) = L$ , de sorte que  $\psi$  est ainsi définie et continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

7°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe  $C^1$*

On considère une fonction  $g$  de classe  $C^1$  du segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  dans  $\mathbb{R}$ .

A tout entier naturel  $n$ , on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t) dt.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t) dt.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

8°) *Calcul de l'intégrale  $f(1)$*

On reprend la fonction continue  $\psi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  introduite dans la question 6°.

a) Calculer la dérivée  $\psi'(t)$  pour  $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ .

b) Donner un équivalent lorsque  $t$  tend vers 0 de la fonction  $t \rightarrow \sin^2(t) - t^2 \cos(t)$ .

En déduire la limite  $L'$  de  $\psi'(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0.

En déduire enfin que  $\psi$  est de classe  $C^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et préciser  $\psi'(0)$ .

c) En appliquant le résultat de la question 7°, en déduire la valeur de l'intégrale  $f(1)$ .

---