

b) Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telle qu'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2B) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 3) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_n = 0) \\ \mathbb{P}(Y_n = 1) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2) \\ \mathbb{P}(Y_n = 2B) \\ \mathbb{P}(Y_n = 3) \\ \mathbb{P}(Y_n = 4) \end{pmatrix}.$$

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_n le vecteur-colonne de \mathbb{R}^6 dont les composantes sont, de haut en bas, les réels $\mathbb{P}(Y_n = 0)$, $\mathbb{P}(Y_n = 1)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 2B)$, $\mathbb{P}(Y_n = 3)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 4)$.
Préciser V_0 , V_1 , V_2 , V_3 , puis $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \leq n \leq 3$, et vérifier enfin que $\mathbb{P}(Y_4 = 0) = \frac{7}{48}$.

6°) *Calcul des probabilités $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ de passage à l'origine*

a) Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres de M sont $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.
Etudier si la matrice M est diagonalisable.

b) Dans la suite, on désigne par P une matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^6 à une base de vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $1, -1, \frac{\sqrt{11}}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}, 0, 0$.
Expliciter la matrice $D = P^{-1} M P$, et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir que $V_n = P D^n P^{-1} V_0$.
Déduire de cette formule l'existence de 4 nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma \left(\frac{\sqrt{11}}{6} \right)^n + \delta \left(-\frac{\sqrt{11}}{6} \right)^n.$$

c) En exploitant les valeurs de $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour $1 \leq n \leq 4$ obtenues en 5°), calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, que $\mathbb{P}(Y_{2n-1} = 0) = 0$ et que $\mathbb{P}(Y_{2n} = 0) = \frac{1}{10} + \frac{27}{55} \left(\frac{11}{36} \right)^n$.

7°) *Nombre moyen de passages en 0 entre les instants 1 et 2n*

Pour tout entier $k \geq 0$, on note O_{2k} la variable aléatoire valant 1 si l'individu est en 0 à l'instant $2k$ et 0 sinon, et pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_{2n} = O_2 + O_4 + \dots + O_{2n} = \sum_{k=1}^n O_{2k}$.

a) Qu'indique concrètement la valeur prise par la variable aléatoire S_{2n} ?

b) Calculer l'espérance de S_{2n} , et préciser deux réels a, b tels que $\mathbb{E}(S_{2n}) = an + b + o(1)$.

8°) *Probabilités-limites des positions occupées par l'individu lorsque n tend vers $+\infty$*

a) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = 1$ dont la 1ère composante est 1.

b) Déterminer un vecteur propre de M associé à $\lambda = -1$ dont la 1ère composante est 1.

Dans la matrice de passage P de la base canonique de \mathbb{R}^6 à une base de vecteurs propres de M , on choisit pour 1ère et 2ème colonnes les vecteurs propres ainsi obtenus en 8.a) et 8.b).

(On ne précisera pas les 4 colonnes suivantes de P associées aux 4 autres valeurs propres de M).

c) On admettra qu'en résolvant le système d'équations $PX = V_0$, les deux premières composantes du vecteur solution $X = P^{-1} V_0$ sont égales à $\frac{1}{20}$.

Déduire des résultats précédents les limites des vecteurs V_{2n} et V_{2n+1} lorsque n tend vers $+\infty$.

Expliciter les limites des probabilités des positions occupées par l'individu à l'instant $2n$ lorsque n tend vers $+\infty$, et à l'instant $2n+1$ lorsque n tend vers $+\infty$.